数 学 史

关于刘徽的割圆术*

郭书春 (中国科学院自然科学史研究所 北京 100010)

摘 要 割圆术是刘徽圆田术注的核心内容, 其主旨在于证明《九章算术》中的圆面积公式. 刘徽所采用的极限过程是为进行无穷小分割并最后证明圆面积公式做准备的, 并不是为了求圆周率. 求圆周率是用不到极限过程的, 它只是极限思想在近似计算中的应用. 对刘徽求圆周率程序的错误理解, 会将刘徽置于他从未犯过的循环推理的错误之中.

关键词 九章算术; 刘徽; 割圆术; 极限; 圆面积公式; 圆周率 中图分类号 O112

《九章算术》提出了圆田术:

半周半径相乘得积步. [1]

这就是圆面积公式

$$S = \frac{1}{2}Lr. \tag{1}$$

其中 S, L, r 分别是圆面积、周长和半径. 它是正确的. 然而, 刘徽之前人们以圆内接正六边形的周长代替圆周长 L, 以圆内接正十二边形的面积代替圆面积 S, 用出入相补原理将正十二边形拼补成一个以正六边形周长的一半作为长, 以圆半径作为宽的长方形来推证上述公式. 刘徽说此"合径率一而外周率三也", 其证明极不严格.

为了真正证明圆面积公式, 刘徽创造了著名的割圆术. 他说:

又按: 为图. 以六觚之一面乘一弧半径, 三之, 得十二觚之幂. 若又割之, 次以十二觚之一面乘一弧之半径, 六之, 则得二十四觚之幂. 割之弥细, 所失弥少. 割之又割, 以至于不可割, 则与圆周合体而无所失矣. 觚面之外, 犹有余径. 以面乘余径, 则幂出弧表. 若夫觚之细者, 与圆合体, 则表无余径. 表无余径, 则幂不外出矣, 以一面乘半径, 觚而裁之, 每辄自倍. 故以半周乘半径而为圆幂. 此以周、径, 谓至然之数, 非周三径一之率. [2]

这段文字包括三个互相衔接步骤.

首先, 刘徽从圆内接正六边形开始割圆, 依次得到圆内接正 $6\times 2, 6\times 2^2$, …… 边形. 设圆内接正 6×2^n 边形的面积为 S_n, $n = 0, 1, 2, 3\cdots$ 则

$$S_n < S; \tag{2}$$

而随着分割次数越来越多, $S - S_n$ 越来越小, 到不可再割时, S_n 与 S 重合, 亦即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

其次, 圆内接正 6×2^n 边形的每边和圆周之间有一段距离 r_n, 称为余径. 将 6×2^n 边形的每边 a_n 乘余径 r_n, 其总和是 $2(S_{n+1} - S_n)$. 将它加到 S_n 上, 则有

$$S < S_n + 2(S_{n+1} - S_n), \tag{3}$$

然而当 n 无限大, 6×2^n 边形与圆周合体时, 则

* 收稿日期: 2005-09-21

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}[S_n + 2(S_{n+1} - S_n)] = S.$$

这就证明了圆的上界序列与下界序列的极限都是圆面积.

最后, 刘徽把与圆周合体的正多边形分割成无穷多个以圆心为顶点, 以每边长为底的小等腰三角形, 以圆半径乘这个多边形的边长是每个小等腰三角形面积的 2 倍, 所谓“觚而裁之, 每辄自倍”. 显然, 所有这些小等腰三角形的底边之和就是圆周长, 并且所有这些小等腰三角形面积的总和, 就是圆的面积. 那么, 圆半径乘圆周长, 就是圆面积的 2 倍:

$$Lr = 2S.$$

反求出就完成了(1) 式证明.[3]

显然, 这个证明含有明显的极限过程和无穷小分割思想, 并且求无穷小分割所得的元素的总和思想, 与欧洲前微积分时期的面积元素法十分接近.

刘徽关于公式(1) 的证明非常清晰、明确, 它是整个刘徽圆田术注的核心. 换言之, 证明《九章算术》的圆面积公式(1) 是割圆术的主旨. 可是, 从 20 世纪 10 年代末到 70 年代末长达 60 多年间, 尽管讨论刘徽割圆术的文章、著述是中国数学史研究中最多的, 却只讲极限过程和求圆周率, 都未涉及证明圆面积公式的问题. 甚至一篇逐字逐句翻译圆田术刘徽注的文章[4], 对其中的画龙点睛的几句话“以一面乘半径, 觚而裁之, 每辄自倍. 故以半周乘半径而为圆幂” 竟然略而不译. 实际上, 刘徽的极限过程是为进行无穷小分割并最后证明圆面积公式(1) 做准备的, 不是为了求圆周率的, 求圆周率用不到极限过程, 它只是极限思想在近似计算中的应用.

刘徽接着指出,《九章算术》圆田术中的“周径, 谓至然之数, 非周三径一之率也”. 他批评道: “然世传此法, 莫肯精核: 学者踵古, 习其谬失.” 刘徽随即创造了求“周径至然之数” 即圆周率的科学程序.

他仍从直径 $d = 2$ 尺的圆内接正六边形开始割圆, 依次割成 6×2, 6×2^2, …边形, 反复运用勾股术和开方术, 以及开方不尽“求微数”(即以十进分数逼近无理根) 的方法, 依次求出圆内接正 6×2, 6×2^2, 6×2^3 的边心距、余径和边长, 进而计算出正 6×2^4 即正 96 边形的边长 6 分 5 厘 4 毫 3 秒 8 忽, 面积 $S_4 = 313\frac{584}{625}$ 寸^2; 正 6×2^5 即正 192 边形的面积 $S_5 = 314\frac{64}{625}$ 寸^2, 由(2) 式,

$$314\frac{64}{625}\text{寸}^2 < S;$$

而

$$S_5 - S_4 = 314\frac{64}{625} - 313\frac{584}{625} = \frac{105}{625}\text{寸}^2,$$

$$S_4 + 2(S_5 - S_4) = 314\frac{64}{625} + 2\times\frac{105}{625} + 2\times\frac{105}{625} = 314\frac{169}{625}\text{寸}^2.$$

由(3) 式, 有:

$$S < 314\frac{169}{625}\text{寸}^2.$$

因此刘徽取正 192 边形面积的整数部分 314 寸^2 作为圆面积的近似值:

$$S = 314\text{寸}^2.$$

刘徽说:

以半径一尺除圆幂, 倍所得, 六尺二寸八分, 即周数.

就是说,将圆面积(即圆幂)代回公式(1),反求出圆周长 L 的近似值 6 尺 2 寸 8 分. 刘徽接着说:

又令径二尺与周六尺二寸八分相约,周得一百五十七,径得五十,则其相与之率也. 周率犹为微少也.

这就得出

$$\pi \frac{L}{d} = \frac{628}{200} = \frac{157}{50}.$$

刘徽还算出圆内接正 3072 边形的面积 $S_9 = 314\frac{4}{25}$ 寸^2 作为圆面积的近似值,仍利用(1)式,求出圆周长的近似值:

以半径一尺除圆幂三百一十四寸二十五分寸之四,倍所得,六尺二寸八分二十五分之八,即周数也. 全径二尺与周数通相约,径得一千二百五十周得三千九百二十七,即其相与之率.

这就是

$$\pi = \frac{L}{d} = \frac{628\frac{8}{25}}{200} = \frac{3927}{1250}.$$

超过了古希腊的阿基米德.

由于没有认识到刘徽割圆术的目的在于证明圆面积公式(1),上世纪 70 年代末以前几乎所有的著述都把刘徽求圆周率的程序搞错了. 他们在求出正 96 和正 192 边形的面积后,说:"故

$$314\frac{64}{625} < 100\pi < 314\frac{169}{625}.$$

刘徽舍弃不等式两端的分数部分,即取 $100\pi = 314$,或 $\pi = \frac{157}{50}$."[5]

这显然是利用了我们在中学所熟知的圆面积公式:

$$S = \pi r^2. \tag{4}$$

在数学方法上是正确的,但其违背刘徽的程度也是显而易见的. 实际上,刘徽在求圆周率时,尚未证明(4). 恰恰相反,刘徽利用他所求出的 $\pi = \frac{157}{50}$,修正了《九章算术》中与(4)式相当的另一因使用"周三径一"而不准确的圆面积公式

$$S = \frac{3}{4}r^2$$

可见,对刘徽求圆周率程序的错误理解,会将刘徽置于他从未犯过的循环推理的错误之中.

参考文献

[1] 郭书春汇校. 九章算术. 第 191 页,沈阳:辽宁教育出版社,1990 年. 又:郭书春:汇校《九章算术》增补版,第 18 页. 辽宁教育出版社、台湾九章出版社联合出版,2004 年. 又:郭书春:《九章算术》译注,第 213 页. 辽宁教育出版社,1998 年.

[2] [魏] 刘徽. 九章算术注. 同注 1. 以下凡引刘徽注原文,如不说明,均依汇校本增补版.

[3] 郭书春. 刘徽的极限理论. 第一届全国科学史大会论文(1980 年). 见:《科学史集刊》第 11 集,第 38—39 页. 北京:地质出版社,1984 年. 又见:郭书春. 古代世界数学泰斗刘徽. 第 222—226 页. 济南:山东科学技术出版社,1992 年. 繁体字修订本,第 222—226 页. 台北:明文书局,1995 年.

[4] 励及骥. 九章算经. 圆田题和刘徽注的今释. 数学教学,1957 年第 6 期,第 1—11 页.

[5] 钱宝琮主编. 中国数学史. 北京:科学出版社,1964 年. 又见:郭书春、刘钝. 李俨钱宝琮科学史全集,第 5 卷,第 74 页. 沈阳:辽宁教育出版社,1998 年.