《自然科学史研究》 第32卷 第2期（2013年）：176—191
Studies in the History of Natural Sciences Vol. 32 No. 2(2013)

《算海说详》初探

高 峰[1] 冯立昇[2]
（1. 中国科学院自然科学史研究所，北京 100190；2. 清华大学科学技术史暨古文献研究所，北京 100084）

摘 要 《算海说详》是清初李长茂以《算法统宗》为蓝本编纂的珠算著作，它继承并发展了《几何原本》《同文算指》传入之前中国传统算学的内容。一直以来，学者多认为该书仅仅是《算法统宗》的注解之作，因而关注不够，在数学史上较少论及。本文首先考证了李长茂的生平及《算海说详》的著刻缘起，对该书的两个刊本作了详细的比对。并通过对该书结构和内容的讨论，试图对《算海说详》在若干算学问题上的创获和局限作出客观的评价。

关键词 传统算学 《算海说详》 《算法统宗》 李长茂
中图分类号 N092：O112
文献标识码 A **文章编号** 1000-1224(2013)02-0176-16

程大位的《算法统宗》一经问世，便产生了巨大影响，不少增删、改编本和类似的著作纷纷问世。[1]《算海说详》就是在这种影响下出现的一部珠算著作，由清初李长茂纂辑而成。它在珠算史上占有一席之地，如提出珠算开平方、开立方捷法①[2]，创“首位挨乘”速算法②[3]，这些成就，华印椿、李培业在其相应著作中皆有详细论述。然而，该书不仅仅是一部珠算著作，实际上它涉及了中国传统数学的多个方面，对堤积术、圆垛求积术、方程术的讨论，都有较为独到的见解③。然而，一直以来，该书或被认为是《算法统宗》的注解之作，或被认作是根据《算法统宗》“删繁就简，压缩而成的”（[1]，87页；[2]86页），故未能引起学者的足够重视，至今还没有出现系统论述和评价该书的论著，甚至在数学史上也较少提及。有鉴于此，本文不揣浅陋，从作者、版本、结构和内容方面，对该书作初步探索，试图弥补这一缺憾。

收稿日期：2011-11-28；**修回日期**：2013-04-18

作者简介：高峰，1986年生，吉林榆树人。助理馆员，主要研究方向为中国古代数学史；冯立昇，1962年生，山西浑源人。清华大学科技史暨古文献研究所教授，科学技术史专业博士生导师，主要研究方向为数学史和技术史。

① 即不用廉隅开方捷法。

② 即“位位清”算法，“就是从首位起，依次找出逐位相乘中的‘同位数’，然后把每一位的‘同位数’相加，从首位起依次写出乘积的各位数字。”参见[3]。

③ 此外，在百鸡术方面也有一定成就，朱一文曾在其硕士论文《百鸡术的历史研究》中有过深入的探讨。他分析指出，《算海说详》对于百鸡术的解法，与传统数学不同，却与斐波那契《计算之书》中的“合金法”极为类似。他将《算海说详》中的百鸡术解法看做百鸡术演变的重要分支，给予了高度的评价。（朱一文：《百鸡术的历史研究》，上海交通大学硕士论文，2008，32～35页）

1 作者生平

《算海说详》的作者李长茂,史料记载很少。关于他的传记,仅见于道光间纂修的《章丘县志》[4],又极为简略,并且存在记载失实的情况①。所幸的是,在《算海说详》的自序[5]中,李长茂较为详细地叙述了自己的仕宦经历和编纂该书的过程,为我们了解他的生平事迹提供了重要的帮助。现依据上述两种史料,并结合相关史志文献,对李长茂的生平及《算海说详》成书情况,作一考证和梳理。

李长茂,字明南,号拙翁②,自号强恕居士③。山东章丘人。明神宗万历间(1573 ~ 1620)选贡④,主要活动于明万历至清顺治年间。顺治五年(1648),出任南皮知县。此时,满清初入关,社会极不稳定。次年,南皮县"盗贼蜂起,城门昼闭,焚掠村庄,杀掳无虚日"[6],李长茂身为知县,无计可施,旋即被革职。⑤ 被贬之后的李长茂,苦闷抑郁,牢骚满腹,抱怨"有用世心无用世遇",于是自暴自弃,"不复作出户志"。后感于友人之言,于十二年二月赴南京,出任江宁府(治所在南京)知事⑥[7]。知事为府属吏,乃一九品小官,掌勘察刑名(《清史稿·职官三》),没有实权,却差役繁重。十四、十五年,李长茂渐渐受到重用,并委以实职,先后署理江宁府属邑江浦和江宁两县印务,即代理知县。在署理江宁任上,因挪用官款,又辖区内江宁镇发生官银被劫事件,李长茂再次遭到弹劾,并被勒令补偿亏空的官银。十五年七月,卸去职务,次年春,"勉竭四贷,变易马匹服器",方清偿亏空款项。然而,此事并未结束,清廷仍在追究其责任。⑦ 在此期间,又闻知远在山东老家的父亲去世,而自己因官司在身,不能回家守孝,"北望震恸,几欲无生"。感慨"忠与孝与,一者安居? 人乎子乎,两无比数",令人扼腕唏嘘。自此之后,一直寄居南京。

---

① 卷11《人物志下》载:"李长茂,字明南,号拙公。拔贡生。幼颖异,淹贯经术,尤精数学。筮仕南皮县令,荐升陕州知州,所至有能名。在京日,有参赞某支军饷,会计数日不得当,令长茂计之,顷刻立办。因著有《算海说详》十六卷,藏于家。"查《陕州志》,并无此事,恐系误传。又《算海说详》应为九卷,此处误记作十六卷。

② 一作拙公。顺治本《算海说详》萧维枢序、康熙本《算海说详》沈世奕序及《算海说详》正文按语,皆作"拙翁",《(道光)章丘县志》作"拙公",二者实同。

③ 一作强恕道人。《算海说详》自序落款钤印"强恕道人",而正文中各卷署名皆为"强恕居士李长茂",二者亦同。

④ 《(康熙)章丘县志》卷5《选举志》在"明代选贡"条目下列出李长茂,没有指明具体年代。《(道光)章丘县志》卷8《选举表》则以李长茂为万历元年(1573)贡生。按,李长茂于顺治五年(1648)年出任南皮知县,假使李长茂20岁选贡,则出任知县时已近百岁,于理不通。笔者推测,《(道光)章丘县志》的《选举志》系以表格的形式罗列历代科举人材,纂修者由于不能确定李长茂选贡的具体年份,仅知道是万历年间拔贡,所以,为迁就表格的形式,故将李长茂归到万历元年下。

⑤ 据《(光绪)重修天津府志》卷14,李长茂于顺治五年任南皮知县,七年,何中举继任。则李长茂在南皮知县任上不足两年。

⑥ 据《算海说详》自序,李长茂说自己"于未之春仲,补任白下末级次署职",未即乙未年(顺治十二年),"白下"即指南京,李长茂没有在这里交代具体官职。据[7]云"本府知事李长茂",可知,李长茂当时在江宁府任知事。

⑦ 据[7]载,江南清吏司在追查江宁、江浦等县在顺治十二年至十五年发生"冒支侵那等项"的经管官吏时,李长茂历然在册。

李长茂"幼颖异,淹贯经术",好《周易》,"凡二十年,寝悟于中,有得随录"。南皮被贬之后,颇为失意,于是罢弃诸书,专攻易数之学,汇辑各家之言,成"易筮数册"。又精通算学,《(道光)章丘县志》载其"在京日,有参赞某支军饷,会计数日不得当,令长茂计之,顷刻立办。"顺治十六年,幽居南京的李长茂,在寂寥愤懑,百无聊赖之际,开始"取算家言",编纂算书。是年四月,成《算海说详》九卷。次年,他携稿前往丹徒县(治所今江苏镇江),拜访丹徒知县萧维枢①,二人朝夕相谈,甚为投机,将所著《算海说详》出示给萧维枢,萧氏"静几三覆"[8],对该书大加赞赏,遂于十八年付梓刊行。康熙元年,李长茂对原书板加以挖补修改,请吴县进士沈世奕②作序,再次印行。

2 《算海说详》版本情况

《算海说详》现存两种版本,一为顺治十八年萧维枢作序的初刻本(以下简称"顺治本"),山东省图书馆有藏本[9]。一为康熙元年沈世奕作序的修补本(以下简称"康熙本"),故宫博物院有藏本[10]。此外,日本内阁文库、前田尊经阁和早稻田大学也藏有康熙本。[11-13]

一直以来,学术界只知有康熙本,不知有顺治本。《近代中算著述记》(1928)③[14]、《四部总录算法编》(1957)[15]等算学书目都没有著录顺治本。《中国古籍善本书目》(1994)[16]、《中国算学书目汇编》(2002)[17]虽然著录了山东省图的藏本,却记为康熙本。首次注意到顺治本的是刘钝先生,他在1980年的一次游学期间,在山东省图书馆看到了这个版本。不过,直到2006年,他才在一篇回忆文章中提及此事[18]。2002年,《续修四库全书》将鲁图所藏顺治本影印出版。

不过,顺治本和康熙本虽是两个版本,但差别并不大,除了他序不同外(前者萧维枢作序,后者沈世奕作序),卷数、板框、行款、字体并无不同。可以断定,后者实际上是用前者的书板重新刷印的,只是在若干处做了修改而已。这些修改约有五六十条,包括对顺治本计算、抄写出现错误的改正,如卷4"开三乘立方法"解义,原作"一乘再乘三乘之小方"([9],638页),康熙本改作"一乘再乘之小方"([10],81页),挖去了"三乘"两个字;为使若干计算数据更加精确,补充位数,如卷4"金毬以径问积难题歌",原作"一千四百八十一寸五分四厘"([9],640页),康熙本改作"一千四百八十一寸五四厘四毫"([10],83页),增加"毫"位,因空间有限,被迫省略了"分"字;对顺治本表达不准确、不充分的地方加以补充和修改,如卷5"求倚壁内角堆积米法"。原题为:已知内角堆下周(C)12尺,高(h)12尺,求体积(V)([9],645页)。《算海说详》给出的一种增法为:

---

① 萧维枢,字拱宸,辽东人,官生。顺治十七年二月至次年十二月,出任丹徒知县。(参见[8],558~559页;《(光绪)丹徒县志》卷10;韩世琦《抚吴疏草》卷10《覆戴可进等赦前赦后疏》)

② 沈世奕,字韩倬,号青城,又号竹斋。顺治十二年进士,历官翰林院编修、司经局洗马。(参见《(民国)吴县志》卷13,卷66下)

③ 该书著录为"算法说详"。故宫所藏题名为"算法说详",萧维枢序也作"算法说详序"。除此之外,沈序、自序及该书书口题名皆作"算海说详",后人在征引及著录时,也都作"算海说详"。又萧序开篇即云:"算有海乎?",系针对"算海"而发,故该书题名本应为"算海说详"。

$$V = \frac{4}{3}Ch$$

这种解法只有在 $C = 12$ 的时候才适用,顺治本没有指出这一点,康熙本在该题解法后面的空白处补充道:“求增四因三归外周一法,惟全周四十八乃合,前已解明。全周合,故半周亦合。拈出免人误用,切勿执为通法也。”([10],88 页)指出“增法”只有在某些特殊的情况下才适用,不可误以为通法。诸如此类。以上不同,皆是在底板上的小挖小补,不细心比对,难以发现。

与顺治本相比,康熙本的最大变动,出现在卷 8 中。不仅重新刊刻了顺治本卷 8 的廿二叶,改为“又廿一”叶,另增刻“廿二”“又廿二”两叶。这一卷有“八倍除本问利法”一题:今有钱一文,每日除本生利八文,共计八日,问本利若干。([9],683 页)设共本利为 S,顺治本给出的解法为:

$$S = 8^8 + 2 \times 8^7 + 3 \times 8^6 + 4 \times 8^5 + 5 \times 8^4 + 6 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 8 \times 8$$

这种解法实际上是错误的,康熙本删掉了这种解法,并增加两种新法,第一种:

$$S = 1 \times 9^8$$

第二种:

$$S = 8^8 + 8 \times 8^7 + 28 \times 8^6 + 56 \times 8^5 + 70 \times 8^4 + 56 \times 8^3 + 28 \times 8^2 + 8 \times 8 + 1$$

第二种解法实际上为 $(8+1)^8$ 的展开式。在该题的解义中,康熙本对新法进行详细阐释,务尽其意。

通过对两个版本的比较,可见李长茂的治学态度是比较严谨的。

3 《算海说详》结构

《算海说详》全书九卷,每卷一章,计分九章,但与传统九章有较大差异。李长茂认为,旧有算书(主要指《算法统宗》)“多篇章纷错”([10],8 页),故“按法釐次,讹误者正之,杂乱者更之,不备者加增之。”([10],8 页)他抛弃了传统九章的部分名目,设立了新的九章篇目(为叙述方便,以下姑且称传统九章为旧九章,李长茂新设立的九章称新九章)。新九章篇目为:汇法、轨区、勾股、开方、测贮、功程、镜泉、衰分、匿覆。其中,勾股、衰分两章仍旧沿袭旧九章名目;轨区、开方、功程、镜泉四章,分别相当于旧九章的方田、少广、商功和粟布章,变更篇名而已;匿覆章,大致包括旧九章中的盈朒、方程两章;测贮章,旧九章中没有类似的篇目,该章收录有关贮藏的仓窖、箭束、堆垛等问题,涉及旧九章中粟布、少广、商功等章的相关内容。汇法章,也非旧九章名目,顾名思义,汇法即是胪列各种基本算法。《算法统宗》[19]卷首、卷 1、卷 2 和卷 17 杂法中的大部分内容,被汇集于此章,置于九章之首。此外,《算海说详》第 9 卷之后设附录,汇集不能纳入九章的各类杂法。《算法统宗》卷 13 至卷 16 收录了以歌诀形式设立的算题 108 道([1],69 页),称之为难题。《算海说详》则舍去了难题章,将各类难题按类附在相应算法之下。

关于两书的篇章分合,详见表 1。

表1 《算海说详》与《算法统宗》章节比较

《算海说详》	《算法统宗》	
算书源流本末、算法九章名义、算法用字凡例	卷17杂法"算经源流";卷1"九章名义"、"用字凡例"	
卷1汇法章	卷首、卷1、卷2、卷17杂法"金蝉脱壳""二字算歌""写算""一笔锦""洛书纵横图""纵横定位分别九图""一掌金""袖中定位掌图"	卷13粟布难题2(2表示数量,下同)、卷15均输难题1
卷2轨区章	卷3方田、卷7分田截积、卷6少广"长阔相和""长阔相差""平圆"、卷12勾股"勾股容方容圆"	卷13方田难题7、卷15少广难题6、卷7分田截积难题1①
卷3勾股章	卷12勾股	卷16勾股难题7
卷4开方章	卷6少广	卷14衰分难题1、卷15少广难题3、
卷5测贮章	卷4粟布"盘量仓窖""各处盐场散堆量算引法"、卷6少广"米求仓窖""方圆三稜束法"、卷8商功"量木梱""堆垛图"	卷15少广难题1
卷6功程章	卷8商功、卷9均输②	卷13方田难题1、卷13粟布难题1、卷15商功难题3、卷15均输难题4
卷7镜泉章	卷4粟布、卷9均输、卷2"倾煎论色""差分"(合本问利)	卷13粟布难题3
卷8衰分章	卷5衰分、卷9均输、卷2"约分""乘分""课分""通分"、卷3方田"带分母用约分"	卷13粟布难题1、卷14衰分难题20、卷15商功难题1、卷15均输难题2、卷16盈朒难题3
卷9匿覆章	卷10盈朒、卷11方程、卷5衰分"匿价差分""贵贱差分""物不知总"	卷13粟布难题1、卷15均输难题4、卷16盈朒难题2、卷16方程难题3
卷9附录	卷17杂法、卷首"洛书易换数"	

《算海说详》对新九章的编排,遵循从简到繁、由浅入深的原则。汇法章胪列各种基本算法,是算学的基础,其主旨在于"推明理数源流,分析算术纲目"([10],9页)。而置于新九章之末的匿覆章则是各种基本算法之升华。本章篇名取自于一种射覆游戏,射覆是流行于士大夫中间的一种猜物游戏,用瓯、盂等器具覆盖某物,众人竞猜。这章收录的盈朒、方程、匿价差分等算题,本数并未直接给出,而是通过"设法问难",方能"彼此互形"

① 按,此难题没有列入"难题"章,而是附在卷7"分田截积"章。

② 《算法统宗》卷9《均输章》没有具体子目,《算海说详》卷6、7、8皆有《均输章》算题,题量大致相当。《算海说详》卷6所收与轻重问价、因货定程有关,卷7所收与照派纳粮、分限纳税有关,卷8所收与倍积问利、鸡兔同笼有关。

([10],8 页),与射覆猜物颇为相似。李长茂认为该章各种算法乃“数理之玄阒”、“算家之上术”([10],140 页),算法至此,可谓“至矣尽矣”([10],8 页)。本章涉及的各种算题,在李长茂看来,都是颇有深度的,故置于九章之末。

新九章的设立,有合理的一面。如,设立测贮章,将《算法统宗·粟布章》中的仓窖求积米问题与《少广章》中由积米求仓窖问题编录在一起,相互考较。这两种问题涉及的算法互为反正,放在一起比较研究,有利于相互发明;将《少广章》中的箭束问题与《商功章》中的垛积问题合编在一章,也是颇为合理的,箭束实际上也是一种垛积术,王文素《算学宝鉴》即将二者放在一起求解([20],卷 21)。再如,《算海说详》将《算法统宗》卷 17 杂法拆开,将“一笔锦”、“写算”、“洛书定位图”、“一掌金”等各类非珠算算法编入《汇法章》,将与算法无关的“幻方图”、“音律相生图”、“孕推男女”等问题编入附录,也是颇为合理的。

不过,《算海说详》对某些篇章的编排,也殊欠考虑。如将《勾股章》置于《轨区章》之后,只因《轨区章》讨论了勾股田求积的问题,其实,勾股术和勾股田求积并无直接关系。该书对某些篇次安排的解释,也有牵强之处。但不论怎么说,《算海说详》突破了旧九章的藩篱,提出新九章的分类方案,不失为一种有意义的尝试。

4 《算海说详》内容评析

《算海说详》(以下简称《说详》)收录算题 492 道(包括难题 78 道),有 403 道直接抄录《算法统宗》(以下简称《统宗》)原题或者更换原题数据改编而成,约占《说详》总题数的 80%。该书还收录算法歌诀 87 首,其中 76 首是《统宗》的原诀,或在原有歌诀基础之上稍作修改而来。

在每个算题后面,《说详》都尽量罗列众法,这些解法前或注“旧法”,或注“更法”,或注“增法”。旧法,即《统宗》原有的解法;更法,是对《统宗》原有错误解法的更正;增法,则是《统宗》中没有、《说详》新增的解法①。在歌诀和算题下面,《说详》还设有“解义”,对歌诀意义、解法算理、解题过程进行详细阐释,尤其侧重于对“更法”和“增法”的解释。在“解义”中,随处可见李长茂对《统宗》原有错误解法的批点,如指出旧法“非是,今改正”、“旧法亦未当也”、旧法“偶合,不可为准”、“今更列若干法于后,互相发明”,等等,不胜枚举。

虽然,无论是从《说详》在算题、歌诀方面对《统宗》的继承,还是从它新创的,与经传注疏体颇为类似的“解义”体来看,似乎都证明它不过是注解《统宗》的作品。然而,若认真研读该书更正和新增的解法及其在“解义”中不厌其烦的阐释,我们就会看到,该书在某些算学问题上的见解,远在《统宗》之上,甚至要比产生在它后面的一些数学著作的见解更为深刻。下面,以堤积术、圆垛求积术和方程术为例,探讨《算海说详》在数学史上的价值和局限。

---

① 实际上,更法和增法界限并不明确,常常混用。

4.1 堤积术

《算海说详》卷6《功程章》载有一道求长堤体积的算题，题设如下（图1）：

今有长堤一所，东头上广(a)八尺，下广(b)一十四尺，高(h)九尺。西头上广(a')二十尺，下广(b')二十二尺，高(h')二十一尺。东至西长(l)九十六尺，问积尺(V)若干。([10]，200页)

如图1所示，这是个一般类型的长堤，两侧面 $AA'BB'$ 与 $CC'DD'$ 为曲面。求其体积的方法，在我国传统数学中称为堤积术。该术早在唐代王孝通的《辑古算经》中，就已经有了准确的表述[21]，其术文转换成现代数学符号为：

$$V=\frac{1}{6}\left(\frac{(2h+h')(a+b)}{2}+\frac{(2h+h')(a'+b')}{2}\right)$$

可惜，王孝通并没有给出这个公式的推导方法，随着《缉古算经》在元明两代的散佚①，不少算书，包括《详明算法》、《全能算法集》、《指明算法》、《九章比类算法大全》及《算法统宗》在内的元明算书，都将公式中的分母6讹作5，乃至清前期方中通《数度衍》、梅瑴成《增删算法统宗》和屈曾发《九数通考》，仍旧沿误未改。直到清中后期，《缉古算经》的影宋钞本流传开来，孔广森、张敦仁、李潢等才将5除改回6除，但没有给予推导证明。对堤积术的正确推导，是由清末的蒋维钟在《堤积术辨》中完成的。如图2，蒋氏将该长堤从顶边 $A'D'$ 斜切至底边 BC，得到 AD-$CBA'D'$ 和 $B'C'$-$CBA'D'$ 两个羡除，这两个羡除之和较原堤体积多，称作凸体。又从顶边 AD 斜切至底边 $B'C'$，得到 BC-$ADC'B'$、$A'D'$-$ADC'B'$ 两个羡除，这两个羡除之和较原堤体积少，称作凹体。求得凸体和凹体的平均值，即为原堤的体积。②[22]

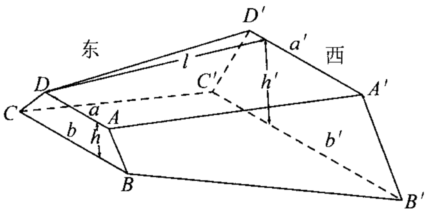

图1 《功程章》长堤体积算题示意图

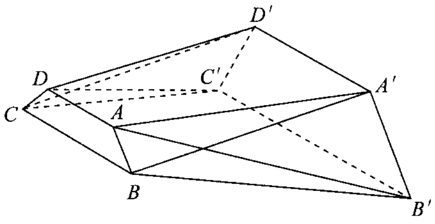

图2 《堤积术辨》术文示意图

实际上，明后期王文素在《算学宝鉴》中，就已经意识到5除是错误的，应当用6除。他还解释说："愚谓倍东高并西高，是三高也。另倍西高并东[高]，又是三高，共六高。而乘长广是六段积也。岂可不用六归而用五归乎？"([20]，232页)李长茂在《算海说详》中，也更正了5除的错误③，并提出了与《算学宝鉴》类似的数理解释：

归法因乘法立，所以归其多乘之数也。凡算积，只是一长一宽一高相乘为本等，

---

① 到了明末，只有章丘李开先家中藏有一种宋刻本，入清后，先后被毛扆和孔继涵所得，现已不存。毛扆还藏有一种影宋抄本，为《缉古算经》今传各种版本的底本，在清中后期流传颇广。（参钱宝琮：《缉古算经提要》，《李俨钱宝琮科学史全集》第4卷，沈阳：辽宁教育出版社，1998，374页。）

② 沈康身认为，这种方法"不是近似的、而是正确的方法"，并认为王孝通可能就是用这种方法得出的长堤公式。

③ 《算学宝鉴》未曾刊刻，仅有钞本流传，传布甚微，李长茂见过《算学宝鉴》的可能性很小。

倍东高加西高,倍西高加东高,是六高矣。又各合并上下广乘,又是二广,便是十二个乘法,将积各减半,即是二广折作一广,仍是六个乘法,自应用六归。旧用五归,殊为无据,且分析算之,与积不合。([10],201 页)

在这里,李长茂表达了这样一种算学思想:立体的本积,应是一长一宽一高相乘。此处是六高、二广与一长相乘,为十二个本积,虽然折半,仍旧有六个本积,故最后应用六除。

较王文素更进一步的是,李长茂还试图利用截积的方法,证明六除的正确性。其步骤如下:

(1)构造与原堤同长、同广、同高的长方堤形。如图 3,长方堤 XB',该长方堤长 $XX'=l=96$ 尺,高 $XW=h'=21$ 尺,广 $XY=b'=22$ 尺。求得长方堤体积为:

$$V_{XB'}=96\times 21\times 22=44352$$

(2)“将上面东西各截广一尺,下广不截,以合两头上广二十尺、下广二十二尺之数”,如图 4,$EX=D'X'=FY=A'Y'=1$ 尺,$A'D'$ 为西头上广。从长方堤两侧各截去一个堑堵,即 $WC'\text{-}XX'ED$、$ZB'\text{-}FA'YY'$,两者颠倒配合,成一高 21 尺、长 96 尺、广 1 尺的“方段”,求得方段体积为:

$$V_1=96\times 21\times 1=2016$$

(3)西头上下广不变,“东头上广从中心两分①,斜截至下广,每面各截四尺”,如图 4,O 为 EF 中点,$BZ=CW=4$ 尺,余 BC 为东头下广。分别截去 $A'B'\text{-}FZBO$、$D'C'\text{-}EWCO$ 两段,李长茂认为两段可以“翻转配合”,合成一个东头广 14 尺、高 21 尺、长 96 尺的堑堵,其体积为:

$$V_2=\frac{1}{2}\times 96\times 14\times 21=14112$$

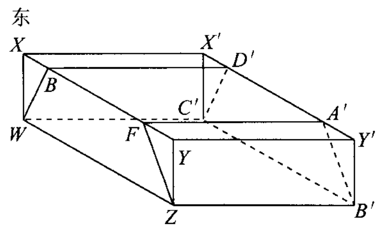

图 3　截积方法步骤 1

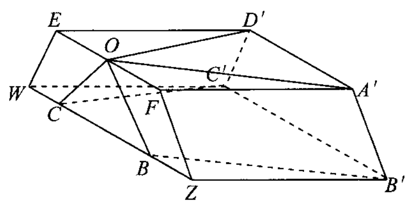

图 4　截积方法步骤 2、3

(4)“东头截高一十二尺……斜截至西头上顶,合原堤之数也。”如图 5,$OH=12$,根据比例,得 $AD=8$ 尺,恰为原堤东头上广 a。截去一个锥体 $O\text{-}AA'DD'$,该锥体东头高 $OH=12$ 尺,下广 $AD=8$ 尺,西头广 $A'D'=20$ 尺,长 $l=96$ 尺,李长茂求得该锥体体积为:

$$V_3=\frac{AD\cdot 1}{4}\left(OH+\frac{1}{2}A'D'\right)=4224$$

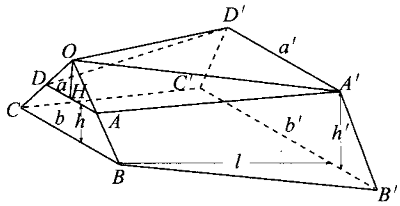

图 5　截积方法步骤 4

① 根据该长堤所给数据,若延长东头 BA'、CD',二者恰交于 EF 中点,故从“中心两分”。

用堤积公式求得原堤体积 $V=24000$ 尺，V、V_1、V_2、V_3 四段体积相并，恰好等于长方堤全积，若用5除，则较长方堤全积少，从而说明6除是正确的。

以上，就是李长茂对堤积公式用6除的证明，他所利用的截积方法是比较巧妙的，比较符合我国传统算学思想。不过，由于他对长堤形状的错误认识，导致他的证明并没有解决问题。该长堤顶面 $AA'DD'$ 与东西两面相垂直，堤长实际上是顶面梯形的高。而李长茂则以为长堤底面 $BB'CC'$ 与东西两面垂直，将底面梯形的高误作堤长。因此，若想从第一步构造的长方堤中截出所求长堤，应当自下而上截取，而不是想他那样自上而下。长堤两侧面为曲面，而李长茂则认为是平面。另外，可能是为了迁就结论，他在求最后截掉的锥体体积 V_3 时，利用的公式也是不正确的。

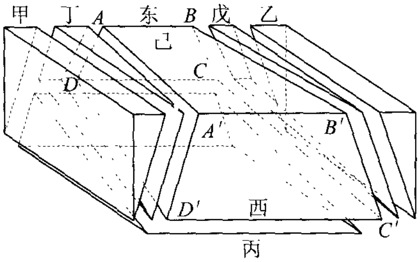

图6 堤积术新思路示意图

不过，李长茂的这种尝试，为我们证明并推导《缉古算经》中的堤积术提供了一种可行的思路。实际上，可以将长方堤按照图6作如下的截割：

首先，截去甲、乙两个堑堵（这一步与李长茂给出的步骤相同）。然后，自长方堤底部截去丙段。最后，截去丁、戊两段，所得己段即所求长堤。丁、戊两段与原长堤的临面 $A'D'AD$、$B'C'BC$ 可作两次截割，分别可以构造出蒋维钟所说的凸体和凹体，平均二次所得的堤积，即可走上与蒋维钟殊途同归的道路。

虽然，由于李长茂对长堤形状的模糊认识，导致他对堤积术的讨论并不十分成功。不过，仅就他将5除更正为6除，又进一步试图用截积的思路来进行证明，也足以说明他在这个问题上是有其历史贡献的，应当给予积极的评价。

4.2 圆尖垛求积

圆尖垛求积，在我国传统数学中，属于垛积术范畴。它是由奇、偶二层分别构成的两组二阶等差数列，其奇数层为圆箭束，偶数层为内周为三的圆环束：

奇数层：1，7，19，37，61，……，一阶差为6，12，18，24，……，二阶差为6。

偶数层：3，12，27，48，75，……，一阶差为9，15，21，27，……，二阶差为6。

设 n 为圆尖垛层（项）数，n_1 为奇数层（项），n_2 为偶数层（项），奇数层积与偶数层积分别为：

$$S_{奇}=n_1^3, S_{偶}=\frac{1}{2}n_2(n_2+1)(2n_2+1)$$

当圆尖垛底层为奇数层时：

$$n_1=\frac{n+1}{2}, n_2=\frac{n-1}{2}$$

则圆尖垛共积：

$$S=\frac{1}{8}[n(n+1)(2n+1)+n] \quad ①$$

当圆尖垛底层为偶数层时：

$$n_1=n_2=\frac{n}{2}$$

则圆尖垛共积：

$$S=\frac{1}{8}[n(n+1)(2n+1)+(n+1)] \quad ②$$

圆尖垛问题，最早出现在元代朱世杰的《四元玉鉴》中，被称作“圆锥垛”。《四元玉鉴》卷下“果垛叠藏门”有两道圆锥垛问题。其中一道题设及解法如下：

今有圆锥垛果子积九百二十三个。问高几层。

答曰：一十五层。

术曰：立天元一为层数。如积求之，得七千四百五十五为益实，二为从方，三为从廉，二为从隅。立方开之。合问。（[23]，116 页）

《四元玉鉴》的解法可以表示为：

$$S=\frac{2n^3+3n^2+2n}{8}$$

这是一个底层为奇数层的圆尖垛，《四元玉鉴》所给公式与公式①是一致的。此后的算学书，如《算学宝鉴》、《九章比类算法大全》、《算法统宗》等，都没有著录圆尖垛问题。《算海说详》卷 5《测贮章》中收录了两道（[10]，95 页），对底层为奇数层和偶数层的圆尖垛分别作了讨论。按照底层周长不同，他将圆尖垛分为“整六”和“有零六”两种。所谓“整六”，即底层周长为 6 的倍数，可以被 6 除尽，即底层为奇数层的圆尖垛；所谓“零六”，即不能被 6 除尽，底层为偶数层的圆尖垛。对这两种情况的圆尖垛，他分别给出了求积公式：

当底层周长为整六时：

$$S=\frac{n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{n+1}{2}}{4} \quad ③$$

当底层周长为零六时：

$$S=\frac{n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{n}{2}}{4} \quad ④$$

其中：

$$n=2\times\frac{a_n}{6}+1=\frac{a_n}{3}+1$$

a_n 为圆尖垛底层周长，n 为圆尖垛层数（高），李长茂给出的这两式是完全正确的，它们分别等价于公式①与公式②。

李长茂对圆尖垛的讨论，基于以下两点认识，首先是方尖垛求积公式。方尖垛，《算海说详》又称“四面尖垛”，即《四元玉鉴》中的“四角垛”①，其求积公式为（n 为方尖垛底边边长，亦方尖垛高）：

$$S_{方尖}=\frac{n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{3}$$

① 各层皆由方箭束构成，实际上是这样一个数列：$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \cdots\cdots, n^2$

其次是方尖垛与圆尖垛二者关系。在圆半垛算题的解义中，李长茂指出："圆不离方，方尖得立方三分之一，圆尖得方尖四分之三，即立方四分之一，故方尖垛用三归，圆尖垛用四归。"([10],96页)不过，这只是就大概而言，二者并非简单的3:4的关系，对圆尖垛的奇数层和偶数层，需要做分别讨论。①

圆尖垛的奇数层和偶数层分别由圆箭束和内周为3的圆环束构成，两者在《算海说详》分别被称为有中心圆束和无中心圆束。方尖垛各层皆是由方箭束构成的，与等高的方尖垛相比，圆尖垛偶数层共积：

$$S_{圆偶}=\frac{3}{4}S_{方偶}$$

奇数层共积(n_1为奇数层层数)：

$$S_{圆奇}=\frac{3}{4}S_{方奇}+\frac{n_1}{4}$$

则：

$$S_{圆尖}=\frac{3}{4}S_{方尖}+\frac{n_1}{4}=\frac{n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)+n_1}{4}$$

当圆尖垛层数为奇数时(底周为整六)，$n_1=\frac{n+1}{2}$，可得公式③；为偶数时(底周为零六)，$n_1=\frac{n}{2}$，可得公式④。n_1为奇数层层数，也就是奇数层有中心圆束的中心总数。在圆尖垛解义中，李长茂解释到，加n_1，"非意加也，……加入者，加中心也。中心不在整六半六周内，故外加之而合，皆数理自然，莫可易也。"([10],95页)

李长茂对圆半垛也作了讨论([10],95～96页)，他将圆半垛分为三种情况：上下周皆为整六；上下周一个整六、一个零六；上下周皆为零六，并且给出一个通用公式(a为上周通径，b为下周通径)：

$$S_{圆}=\frac{\left(a^2+b^2+ab+\frac{b-a+1}{2}\right)(b-a+1)}{4}$$

该公式由四面半垛(方垛)推导得出，用它来解决第二种情况下的圆半垛，准确无误，而第一种和三种情况下的圆半垛，用该公式来求积时，分别会出现较本积多$\frac{1}{8}$和少$\frac{1}{8}$的现象，李长茂以"个物无零"，不足者增入，有余者舍去，故最终结果仍与本积相合。该公式虽然不够精确，不过仍旧有普遍的适用性。

4.3 方程论

方程是九章之一，中国传统数学中的方程相当于现代数学中的线性方程组，在《算海说详》中，方程问题皆收录在第9卷《匿覆章》中。

《算海说详》之前的算书，在方程问题上有很多错误的认识，其中最大的一个问题，是

① 李长茂并没有对于圆尖垛奇数层和偶数层与方尖垛对应层的关系作分别讨论，以下内容，系笔者据《算海说详》对圆箭束的论述，作的一点合理推测。

对系数有正负的方程作加减消元时，经常以加为减，以减为加，没有规矩，颇为随意，《算法统宗》可谓是这方面的典型代表。针对这种混乱的情况，《匿覆章》"牛羊猪"一题解义，对方程系数正负的确定及合并消元过程中系数加减变化，作了如下论述：

大抵数分买卖，有出有入，卖出者，即我所备之价，故以为正；买入者，为价所买之物，故以为负。凡系二正为法，所乘物系一正一负，皆用合并；系二正，皆用减除。价(除)[系]一余一适足、一不足一适足，无可合减；如系一余一不足，亦用合并；二余、二不足，亦用减除。若系一正一负为法，所乘物二正，皆用合并；一正、一负，皆用减除。价系二余、二不足，亦用合并；一余、一不足，亦用减除。([10],155 页)

用这套理论，李长茂对"牛羊猪"一题的解法作了详细阐释。略述于下。

原题为："今有卖二牛五羊，买十三猪，剩银五两。卖一牛一猪，买三羊，适足。卖六羊八猪，买五牛，少银三两。问牛羊猪各价若干。"([10],154 页)根据卖出为正，买入为负，可列式如下：

1 行	正牛二	正羊五	负猪十三	余五两
2 行	正牛一	负羊三	正猪一	适足
3 行	负牛五	正羊六	正猪八	不足三两

为叙述方便，姑且设牛为 x，羊为 y，猪为 z。首先，1、2 两行合并，消去 x。以 x 系数为法互乘两行。此"系二正为法"，两行中的 y、z 系数皆为一正一负，据"所乘物系一正一负，皆用合并"，得 y 系数为 11，z 系数为 15。至于价钱，据"一余一适足、一不足一适足，无可合减"，仍为 5 两。

再将 2、3 两行合并，以 x 系数为法互乘两行。此"系一正一负为法，所乘物二正，皆用合并；一正、一负，皆用减除。"y 为一正一负，互乘后，当用减，得 9；z 为二正，用合并，得 13。价钱为一不足一适足，无可合减，得 3 两。

方中通在《数度衍》中也对方程立正负法作了总结："初以同名减，其下同减而异并；初以异名减，其下异减而同并。"[24] 即首项系数为同名（二正或二负），其余项同名相减，异名相加；首项系数为异名（一正一负），其余项同名相加，异名相减。与《算海说详》相比，概括得更为简洁，但基本思想是一致的。

不过，遗憾的是，李长茂没有进一步讨论在加减消元之后，所剩各项系数的正负问题。在实际计算过程中，还是会出现一些小问题。

此外，《算海说详》在三色方程"砚墨笔"一题的解义中，还讨论了一种方程无法求解的情况。原题：

今有砚三个墨五锭笔九枝，共价八钱一分；又砚四个墨六锭笔七枝，共价八钱九分；又砚五个墨七锭笔八枝，共价一两零六分。问砚、墨、笔价各若干。([10],151 页)

其三色方程可列式如下（x、y、z 分别为砚、墨、笔价）：

$$\begin{cases}3x+5y+9z=81\\4x+6y+7z=89\\5x+7y+8z=106\end{cases}$$

对于这个三色方程，李长茂指出"须三行各有参差不齐，如砚三、四、五，墨五、六、七，笔则

九、七、八,与上颠倒错落,互乘中间有不齐之数,乃可叠次对减,余出一宗之数。"([10],152页)若将三行中的笔数目分别改作7、8、9,则有:

$$\begin{cases}3x+5y+7z=75\\4x+6y+8z=92\\5x+7y+9z=109\end{cases}$$

消去三色方程任意一个未知数,所得到的两个二色方程都是等价的,无法求解。

梅文鼎在《方程论》卷5中,对三色方程"不能成算"的情况也做过论述,他指出:"若三色俱减尽,则不能成算。或三色方程中左三色俱减尽,中右只减一色,则所余者二色,而无相较,乘减无因,不能别其二色,亦不能成算也。"[25]在这里,梅文鼎提出三色方程无法求解的两种情况:一种为三色方程两两对减,减余剩下的两个二色方程完全等价,二者对减,则"三色俱减尽"。一种为三色方程中,有两个式子是完全等价的。第一种情况,就是上述李长茂提到的不能求解的三色方程。顺便提一下,梅文鼎对《算海说详》是比较熟悉的,在《方程论》中曾多次提及该书。虽然总体而言,梅文鼎对《算海说详》持有批评态度,但该书在方程问题上的某些有意义见解,或许对梅氏《方程论》的撰写有所启发。

4.4 表竿

早在《海岛算经》时代,人们就已借助表竿、用重差术来测远度高。但是在文献中,并没有留下有关表竿形制及其使用方法的详细记载。《算海说详》第3卷首次对表竿的部件、规格和形制作了明确的描述:

> 其表竿用极直木竿,修理圆直,上下粗细如一。以二丈为式,量明尺寸,数目墨画,写界明白。下用铁尖钻钉地中,用四面①四小环、小绳四根、铁钉四个,四面斜牵钉地,妨其歪斜。一样二根。再照前式制一丈二根,以便临期高下取用。另制木拐二个,如曲尺样,直长三尺,亦界明尺寸于上。横拐长一尺,头用铁环与表竿套合,或竿用若干尺寸不等,将曲拐套表竿上,对照望竿,尺寸加减止以曲拐为表。其表竿逐寸钻眼,用在何处,用铁锥关住。又制二尺、三尺、四尺望竿各二根,亦界明尺寸,作人目望处用。利器备具,则推验自无差矣。([10],68~69页)

由上述文字可知,这种表竿至少包括三个主要的部件:表竿、曲拐和望竿,各部件规格、数量及使用方法如表2所示:

表2 《算海说详》所载表竿各部件要素表

部件名称	规格	数量	附件及说明
表竿	2丈 1丈	各两根	小环、小绳、铁钉各四:牵引至地,防倾斜。 铁锥:表竿逐寸钻眼,用铁锥固定曲拐
曲拐	直长3尺,横长1尺	两根	形如曲尺。配铁环,与表竿套合,方便上下活动
望竿	2尺 3尺 4尺	各两根	作人目望处用

① "四面"二字,当为衍文。

表竿和望竿各有不同的规格,以适应不同的测量环境。曲拐,是以往的表竿所不具备的新部件。曲拐形如曲尺,配有一个铁箍,在测量时,将曲拐用铁箍套在表竿上,通过上下移动曲拐,来调节表竿的实际高度。调整好后,用铁锥插入表竿相应高度的钻眼内,便可直接读取表竿的实际高度,或作一次简单加减,即可得出。

以往重差测量,仅有表竿和望竿,由于每次测量目标的高低远近都不相同,因此,需要不断更换表竿或望竿,或者调整表间距,方能完成测量,颇为麻烦。而曲拐的使用,使测量便得简单快捷,仅需用曲拐调整表竿的高度,即可轻松地完成测量。在计算的时候,表竿和望竿的数据皆可直接读出,表间距也可以有选择地取定值入算,使计算变得简单方便。

李长茂约生活于明末清初,当时,介绍西方几何、算术知识的《几何原本》、《同文算指》等算学著作已经出现并开始流传。但是,可能是由于战乱的原因,他似乎并没有接触到西方算学知识,《算海说详》探讨的都是我国传统算学的有关问题。该书以当时特别流行的《算法统宗》为蓝本,并用解义的形式,对旧算法多有阐释,有注疏的嫌疑。但它没有沿袭《统宗》的旧九章结构,而是设立新九章,对原有算题依据算法差异,重新分类。在解法方面,除了对《算法统宗》的讹误多有订正外,在若干问题上的见解,要远远超出《算法统宗》,甚至为后来算书所不及。

5 《算海说详》的流传

《算海说详》虽然经过两次刊行,但是流传不广。梅文鼎在《勿庵历算书目》和《方程论》中曾几次提到该书。《勿庵历算书目》指出该书"亦有发明然不能具九章"[26]。《方程论》,对该书的某些解法提出过批评,评价不高。稍后的毛宗旦在《九章蠡测·发凡》中也提及该书,批评其解义"颇未畅达"[27]。

梅文鼎和毛宗旦二人的评价,尤其是梅文鼎的评价,很大程度上影响了《算海说详》在有清一代的流传。到了清中后期,《算海说详》就已经近乎失传了。《畴人传》虽然设有李长茂传,但传文中仅仅转录了《勿庵历算书目》对他的评语,连其字号、籍贯都没有写①[28],这些信息在《算海说详》序言中写得明明白白,可见,阮元等人并没有见过《算海说详》原书。在清代其他的公私藏书目中,也很难见到对该书的著录。清末刘铎在《古今算学书录》中曾收录该书[29],但仅录了书名和作者,没有标注卷数。可知,刘铎也未能见到原书。

不过,《算海说详》刊行不久,便流传到了日本。在该书刊行后十多年的1675年,汤浅得之在《算法统宗》训点本的跋尾中便提到了该书②[30]。《数学记闻》也提到:"《启蒙》之后,虽《算海说详》渡来,天元术不再见,盖失其传也。"[31]《算海说详》的解义体例也为和算家所继承,可见《算海说详》在日本的影响之一斑。

致　谢　本文初稿曾在"第五届中国科技典籍国际会议"(2011)上宣读,与会专家学

① 传文:"李长茂著《算海说详》,梅文鼎谓为'亦有发明,而不能具九章。'"

② 原文作:"又注解此书(指《算法统宗》),名《算海说详》。"

者提出许多中肯意见。在发表过程中,自然科学史研究所韩琦研究员对本文提出了重要的修改意见。在此一并表示衷心感谢。

参 考 文 献

1 郭世荣.算法统宗导读[M].武汉:湖北教育出版社,2000.86~88.

2 华印椿.中国珠算史稿[M].北京:中国财政经济出版社,1987.

3 李培业.中国珠算简史[M].北京:中国财政经济出版社,2007.111~115.

4 吴璋.(道光)章丘县志[M].曹楙坚,纂.//中国地方志集成·山东府县志辑.第68册.南京:凤凰出版社.2004.

5 李长茂.算海说详自序[M]//李长茂.算海说详//故宫珍本丛刊.第403册.海口:海南出版社,2000.2~4.

6 王德乾,等修.(民国)南皮县志[M].刘树鑫,等纂.卷13//中国方志丛书·华北地方.第144号.台北:成文出版社,1968.

7 韩世琦.覆通查积逋一案各官赦前赦后疏[M]//韩世琦.抚吴疏草.卷12//四库未收书辑刊.史08辑6册.北京:北京出版社.91~93.

8 萧维枢.算法说详序[M]//李长茂.算海说详//续修四库全书.第1044册.上海:上海古籍出版社,2002.558.

9 李长茂.算海说详[M]//续修四库全书.第1044册.上海:上海古籍出版社,2002.557~720.

10 李长茂.算海说详[M]//故宫珍本丛刊.第403册.海口:海南出版社,2000.1~164.

11 内阁文库汉籍分类目录[M].台北:进学书局,1970.

12 尊经阁文库汉籍分类目录[M].东京:侯爵前田家尊经阁,1934.

13 早稻田大学图书馆所藏汉籍分类目录[M].东京:早稻田大学图书馆,1991.

14 李俨.近代中算著述记[M]//李俨钱宝琮科学史全集.第6卷.沈阳:辽宁教育出版社,1998.551.

15 丁福保,周云青.四部总录算法编[M].北京:文物出版社,1984.91.

16 中国古籍善本书目·子部[M].上海:上海古籍出版社,1991.324,1195.

17 李迪.中国算学书目汇编[M]//吴文俊.中国数学史大系.副卷第2卷.北京:北京师范大学出版社,2000.547.

18 刘钝.一次难忘的游学经历[J],广西民族学院学报(自然科学版),2006,12(3):18~21,84.

19 程大位.新编直指算法统宗[M]//续修四库全书.第1044册.上海:上海古籍出版社,2002.19~223.

20 王文素.算学宝鉴校注[M].刘五然,等校注.北京:科学出版社,2008.

21 王孝通.缉古算经[M].郭书春,校点.//算经十书.第2册.沈阳·辽宁教育出版社,1992.7.

22 沈康身.王孝通开河筑堤题分析[J].杭州大学学报(自然科学版),1964,1(4):43~56.

23 李兆华.四元玉鉴校证[M].北京:科学出版社,2007.116.

24 方中通.数度衍[M].卷21.桐城方氏重刻本.1878(光绪四年).

25 梅文鼎.梅氏丛书辑要·方程论[M].卷3.承学堂刻本.1761(乾隆廿六年).

26 梅文鼎.勿庵历算书目·九数存古[M].知不足斋丛书本.

27 毛宗旦.九章蠡测发凡[M]//毛总旦.九章蠡测//上海图书馆未刊古籍稿本.第32~33册.上海:复旦大学出版社,2008.39.

28 阮元.畴人传[M].卷36.文选楼丛书本.

29 刘铎.若水斋古今算学书录·象数第三[M].算学书局印本.1898(光绪二十四年).

30 汤浅得之.算法统宗跋[M]//程大位.算法统宗.三桂堂刻本.

31 冯立昇.中日数学关系史[M].济南:山东教育出版社,2009.81.

A Primary Study on *Suanhai shuoxiang*

GAO Feng[1], FENG Lisheng[2]

(1. *The Institute for the History of Natural Sciences, Chinese Academy of Sciences. Beijing* 100190, *China*;
2. *Institue for History of Science and Technology & Ancient Texts, Tsinghua University. Beijng* 100084, *China*)

Abstract Based on Cheng Dawei's *Suanfa tongzong*, *Suanhai shuoxiang* was written by Li Changmao. It inherited and developed the content of Chinese ancient mathematics. Some scholars believed that *Suanhai shuoxiang* was the annotation work of *Suanfa tongzong*, so they hadn't paid enough attention to it. In this paper, the authors firstly give an introduction of Li Changmao, the author of *Suanhai shuoxiang*. Then, they make some comparison between two versions of it. Finally, basing on the discussion about the structure and content of it, they attempt to make objective evaluation of it.

Key words ancient Chinese mathematics, *Suanhai shuoxiang*, *Suanfa tongzong*, Li Changmao