符号法则与方程变形

〔法〕R.笛卡儿

在给出旨在避免上述两种错误①的法则之前，必须对方程的性质作一些普遍陈述。一个方程包括若干项，有些是已知的，有些是未知的，它们当中一些加起来等于其他一些；或者说，所有项加起来等于零，后者通常是我们所考虑的最好形式。

每个方程可以有与其未知数次数②同样多的相异根(未知数值)。例如,假定$x=2$或$x-2=0$，又$x=3$或$x-3=0$，将$x-2=0$和$x-3=0$这两个方程相乘，我们有$x^2-5x+6=0$或$x^2=5x-6$，这是一个x同时具有2和3两个数值的方程。如果我们接着用$x-4=0$去乘$x^2-5x+6=0$，则得到另一方程$x^3-9x^2+26x-24=0$，这里的x为三次，并且具有2、3和4三个值。

无论如何，我们经常可以发现有些根是假的③或者说是毫无意义的。例如，如我们假定x代表"不足5"；有$x+5=0$，用它乘上$x^3-9x^2+26x-24=0$，得到$x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$，这一方程有四个根：2、3、4为三个真根，5是一个假根。

从上文显然可以看出，一个具有数个根的方程总是可以被一个由未知数与一真根之差或一假根之和所组成的二项式所整除。用这种方法，可以降低一个方程的次数。

反过来，如果一个方程不能被一个由未知数加上一个或减去一个数值所组成的二项式所整除，后面这个数值就不是该方程的根。因此，上述方程$x^4-4x^3-19x+106x-120=0$可以被$x-2$、$x-3$、$x-4$和$x+5$所整除，但是不能被x加上或减去任何其它数值所整除。所以，这个方程仅仅可以有四个根：2、3、4和5④。我们也可以确定任何一个方程可能有的真根与假根数：一个方程的真根数可以同它的逐项符号变化数(由+到-或由-到+)相同，它的假根数可以同两个相同符号(两个+号或两个-号)连续出现的次数相同。

这样，在最后一个方程中，因为$+x^4$后面是$-4x^3$，给出了一个从+到-的一次变号，而$-19x^2$后面是$+106x$，$+106x$后面是-120，又给出了两次变号，由此我们知道方程有三个真根；又因为$-4x^3$后面是$-19x^2$，方程有一个假根。

把一个方程的所有假根变换成真根、和把所有真根换成假根，也是容易做到的。我们只须改变第2、4、6和所有偶数项的符号，而保持第1、3、5和所有奇数项的符号不变就行。因此，如将

$$+x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$$

---

①笛卡儿按方程的次数对曲线分类，即一、二次方程对应第一类曲线，三、四次方程对应第二类曲线，五、六次方程对应第三类曲线，余类推。而在同一类曲线中，又有性状简单的与性状复杂的之分；例如同是第一类曲线，圆锥曲线就比圆更为复杂。他在这里说的"两种错误"，系指在作图中通过低级曲线描绘高级曲线，或用性状简单的曲线描绘性状复杂的曲线的企图。——译者注(下同)。

②即方程的次数，原文为number of dimensions of the unknown quantity in the equation.

③即负根，原文为false root；类似地，笛卡儿称正根为真根，原文为true root。当时欧洲多数学者都不承认负数，而笛卡儿也只是部分地接受了负数。

④实际应为2、3、4和-5。

变为

$$+x^4+4x^3-19x^2-106x-120=0,$$

我们就得到一个方程，它具有一个真根5和三个假根2、3与4。

如果一个方程的根是未知的，现在要求用某一已知数值加上或减去它的每一个根，我们必须通过这个方程把未知数转换成另一值，该值比原来的未知数大于或小于那个给定的已知数。这样，如果要求把方程

$$x^4+4x^3-19x^2-106x-120=0$$

的每一个根都增加3，以y来取代x的位置，令y比x大3，即$y-3=x$；然后用$y-3$的平方，或y^2-6y+9来代替x^2；用$y-3$的立方，或$y^3-9y^2+27y-27$来代替x^3；用$y-3$的四次方，或$y^4-12y^3+54y^2-108y+81$来代替x^4，将这些数值代换到上述方程中并合并，我们有

$$\begin{array}{r}
y^4-12y^3+54y^2-108y+81\\
+4y^3-36y^2+108y-108\\
-19y^2+114y-171\\
-106y+318\\
-120\\
\hline
y^4-\ \ 8y^3-\ \ y^2+\ \ 8y\ \ =0,
\end{array}$$

或

$$y^3-8y^2-y+8=0,$$

现在它的真根是8而不是5，因为原来的根已增加了3。另一方面，如果要求把同一方程的根都减去3，我们必须将$y+3=x$，$y^2+6y+9=x^2$等等代换到方程中去。这样，对于$x^4+4x^3-19x^2-106x-120=0$，我们有

$$\begin{array}{r}
y^4+12y^3+54y^2+108y+81\\
+4y^3+36y^2+108y+108\\
-19y^2-114y-171\\
-106y-318\\
-120\\
\hline
y^4+16y^3+71y^2-4y-420\ \ =0,
\end{array}$$

应该观察到，一个方程真根的增大将导致假根以同样数目减小；反之，真根的减少将导致假根以同样数目增加；无论是真根还是假根，被减去一个与其相等的数后将使根成为零；若被减去的数大于原来的根，将使一个真根变成假根，或使一个假根变成真根①。因此，当我们把真根5增加3时，每一个假根都减少3，也就是原先的4现在成为1，原先的3现在成为0，原先的2现在成为一个等于1的真根，因为$-2+3=+1$。这就解释了方程$y^3-8y^2-y+8=0$为何仅有三个根，其中两个根1和8是真根，第三个根也是1，则是假根。另外一个方程$y^4+16y^3+71y^2-4y-420=0$仅有一个真根2，因为$+5-3=+2$，而有三个假根5、6和7。

现在，这一无须确定其数值就能使方程的根变换的方法，产生了两个将被证明是很有用的结果：首先，如果方程的前两项符号相反，我们总是可以通过一个减根变换来消去它的第二项，减去的数字应为第二项②除以第一项的次数；或者，如果前两项符号相同，我们则以同一数值作增根变换。因此，为了消去方程$y^4+16y^3+71y^2-4y-420=0$中的第二项，我将16除以4（4是首项的幂次），商为4，然后令$z-4=y$，列出

$$\begin{array}{r}
z^4-16z^3+96z^2-256z+256\\
+16z^3-192z^2+768z-1024\\
+71z^2-568z+1136\\
-4z+16\\
-420\\
\hline
z^4\qquad\qquad -25z^2-60z-36=0.
\end{array}$$

这个方程的真根现在由变形前的2变成6，因为原来的根增加4，而变形前的三个假根5、6和7现在成为1、2和3，因为原来的每一个假根都已减去4。类似地，为了消去$x^4-2ax^3+(2a^2-c^2)x^2-2a^3x+a^4=0$的第二项，因为$2a+4=\frac{a}{2}$，我们必须令$z+\frac{a}{2}=x$，再列出

①在这段陈述中，笛卡儿没有把假根连同它的符号一起考虑。类似地，他在论及各项系数时也不考虑其符号。

②此处实指第二项系数的绝对值。

$$\begin{array}{r}
z^4 + 2az^3 + \frac{3}{2}a^2z^2 + \frac{1}{2}a^3z + \frac{1}{16}a^4 \\
-2az^3 - 3a^2z^2 - \frac{3}{2}a^3z - \frac{1}{4}a^4 \\
+2a^2z^2 + 2a^3z + \frac{1}{2}a^4 \\
-c^2z^2 - ac^2z - \frac{1}{4}a^2c^2 \\
-2a^3z - a^4 \\
+a^4 \\
\hline
z^4 + (\frac{1}{2}a^2 - c^2)z^2 - (a^3 + ac^2)z + \frac{5}{16}a^4 - \frac{1}{4}a^2c^2 \\
= 0 .
\end{array}$$

找到z值，x值就可以通过$z+\frac{a}{2}$而得到。

第二个有用的结果是，通过把方程的所有根都增加一个大于它的任何假根数的变换，我们可以使所有根都成为真根。当这一步完成后，方程中将不会有两个连续的 + 项或 - 项；进一步，方程第三项的已知量①将大于第二项已知量之半的平方。即使假根是未知的，这一步也可以完成，因为这些假根的近似值总是可以得到的，而我们可以把根增加到比所要求的还要大的程度。这样，给定

$$x^6 + nx^5 - 6n^2x^4 + 36n^3x^3 - 216n^4x^2 + 1296n^5x - 7776n^6 = 0,$$

令$y-6n=x$，我们有

$$\begin{array}{l}
y^6 \left.\begin{array}{r} -36n \\ +n \end{array}\right\} y^5 \left.\begin{array}{r} +540n^2 \\ -30n^2 \\ -6n^2 \end{array}\right\} y^4 \left.\begin{array}{r} -4320n^3 \\ +360n^3 \\ +144n^3 \\ +36n^3 \end{array}\right\} y^3 \left.\begin{array}{r} +19440n^4 \\ -2160n^4 \\ -1296n^4 \\ -648n^4 \\ -216n^4 \end{array}\right\} y^2 \left.\begin{array}{r} -46656n^5 \\ +6480n^5 \\ +5184n^5 \\ +3888n^5 \\ +2592n^5 \\ +1296n^5 \end{array}\right\} y \begin{array}{r} +46656n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6 \end{array} \\
\hline
y^6 - 35ny^5 + 504n^2y^4 - 3780n^3y^3 + 15120n^4y^2 - 27216n^5y = 0 .
\end{array}$$

现在显而易见，第三项的已知量$504n^2$，大于第二项已知量之半的平方，即$\left(\frac{35n}{2}\right)^2$，而且无须将真根增加到比$6n$还大的数。

如果不希望最后一项为零，在这种情况下，为了达到目的，只须将根稍稍增加一点就够了。类似地，如果要求升高一个方程的次数，并使其各项都存在，例如我们希望用一个不含零项的六次方程来取代$x^5-b=0$，首先将$x^5-b=0$写成$x^6-bx=0$，然后令$y-a=x$，我们有
$y^6-6ay^5+15a^2y^4-20a^3y^3+15a^4y^2-(6a^5+b)y+a^6+ab=0$。显然，不管$a$值多么小，这个方程的每一项都是存在的。

我们也可以把一个方程的所有根乘以或除以一个给定值，而不须事先确定这些根的数值。为此，假定未知数乘以或除以给定数后等于第二个未知数，然后用给定数去乘以或除以第二项的已知量，第三项中则乘以或除以给定数的平方，第四项中则乘以或除以它的立方，如此等等，直到最后一项。

这一方法通常用来把一个方程的分数项变成整数，也经常用来使各项系数有理化。例如，给出$x^3-\sqrt{3}x^2+\frac{26}{27}x-\frac{8}{27\sqrt{3}}=0$，要求把它变成一个所有项系数都是有理数的方程。令$y=\sqrt{3}x$，将第二项乘以$\sqrt{3}$、第三项乘以3、最后一项乘以$3\sqrt{3}$，得到的方程是$y^3-3y^2+\frac{26}{9}Y-\frac{8}{9}=0$。接着要求把它变成一个所有已知量都是整数的方程。令$z=3y$，将3乘以3、$\frac{9}{26}$乘以9、$\frac{8}{9}$乘以27，我们有

$$z^3-9z^2+26z-24=0。$$

这个方程的根是2、3和4，因而前一方程的根是$\frac{2}{3}$，1和$\frac{4}{3}$，第一个方程的根是$\frac{2}{9}\sqrt{3}$，

①指该项系数的绝对值，下同。

$\frac{1}{3}\sqrt{3}$ 和 $\frac{4}{9}\sqrt{3}$。

这种方法也可用来使任何项的已知量等于一个给定值。例如，对于方程

$$x^3 - b^2x + c^3 = 0,$$

要求将其第三项系数 b^2 变成 $3a^2$，令 $y = x\sqrt{\frac{3a^2}{b^2}}$，于是我们有

$$y^3 - 3a^2y + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} = 0.$$

无论真根还是假根都不总是实在的，有时它们是虚的①。这就是说，我们总是能够设想任何一个方程具有我愿意选定的那么多根，但是不能保证每一个设想的根总有一个确定值对应它。例如，尽管我们可以设想方程 $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ 有三个根，但是这里仅有一个实根 2，至于其余两个，无论我们怎样按照上述规则去加、减或除，它们总是虚的。

当一个作图问题涉及一个带三次未知数方程的解时，以下步骤必须施行：

首先，如果方程含有一些分数系数，用上面解释过的方法把它们变成整数；如果含有无理数，用乘法或其它一种充分容易找到的方法尽量把它们变成有理数。其次，顺序检验最后一项的所有因子，确定方程左边是否能由未知数加或减这些因子中任何一个而组成的二项式所整除。若能，问题就是平面的②，也就是说，它可以通过直尺和圆规来作出；因为不管二项式中的已知量是不是所求的根，通过用这个二项式去除方程的左边，得到的商是二次的，而且它的根可以用我们在第一卷中已讲过的方法找到。

例如，给出 $y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0$；最后一项64可被 1、2、4、8、16、32和64整除；这样，我们应该决定方程的左边是否能被 $y^2 - 1$、$y^2 + 1$、$y^2 - 2$、$y^2 + 2$、$y^2 - 4$ 等式整除。除以 $y^2 - 16$ 的算式是这样的：

$$\begin{array}{lll}
+y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0 & & \cdots\cdots\text{(被除数)} \\
\underline{-y^6 - 8y^4 - 4y^2} & -16 & \\
0 \; -16y^4 - 128y^2 & & \\
\underline{\quad -16 \qquad -16} & & \\
\quad +y^4 + 8y^2 + 4 = 0 & & \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(商)}
\end{array}$$

从最后一项开始，我们用 -64 除以 -16 得到 $+4$；将它写到商(这一栏)中；用 $+4$ 乘 $+y^2$ 得 $+4y^2$，并在被除数(一栏)中写出 $-4y^2$(乘得的结果总是要取相反符号)。将 $-124y^2$ 加上 $-4y^2$，我得到 $-128y^2$。用 -16 去除它，在商(栏)中得 $+8y^2$，再乘以 y^2，我有 $-8y^4$，然后加到被除数(栏)中的相应项 $-8y^4$ 上。这就得到 $-16y^4$，除以 -16，在商(栏)中得到 $+y^4$。最后(用 y^4 乘以 y^2，我有 $-y^6$)，将 $-y^6$ 加到 $+y^6$ 上得零，这表明除法已经完成。

无论如何，如果有一个余数，或者说任何一个修正过的项不能恰好被16整除，显然这个二项式就不是一个除式。

类似地，给定

$$y^6 \left.\begin{array}{l} +a^2 \\ -2c^2 \end{array}\right\} y^4 \left.\begin{array}{l} -a^4 \\ +c^4 \end{array}\right\} y^2 \left.\begin{array}{l} -a^6 \\ -2a^4c^2 \\ -a^2c^4 \end{array}\right\} = 0,$$

其中最后一项可被 a、a^2、$a^2 + c^2$、$a^3 + ac^2$ 等整除，但是只有两个是我们需要考虑的，这就是 a^2 和 $a^2 + c^2$。其余的将导致商中出现与倒数第二项已知量次数不一致的一项，这样分离除法就不可能了。注意我在这里把 y^6 看成是三次的，因为这里没有含 y^5、y^3 或 y 的项。试将原方程除以二项式

$$y^2 - a^2 - c^2 = 0,$$

我们发现可以按如下格式安排除法：

---

①这里笛卡儿在数学史上首次使用"虚的"这一术语，原文为imaginaire；但是由于他对虚数的意义还认识不清，这句话在逻辑上是有毛病的。

②笛卡儿在这里沿用了古希腊人的术语：古希腊人把曲线分成平面的、立体的和机械的三类：平面曲线是可由尺规作出的；立体曲线专指圆锥曲线；其余的如蚌线、螺线等，则须使用机械才能作出。

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{r}+y^6+a^2\\-y^6-2c^2\end{array}\right\}y^4\left.\begin{array}{r}-a^4\\+c^4\end{array}\right\}y^2\begin{array}{r}-a^6\\-2a^4c^2\end{array}\\
\left.\begin{array}{r}0\quad-2a^2\\+c^2\end{array}\right\}y^4\left.\begin{array}{r}-a^4\\-a^2c^2\end{array}\right\}y^2\begin{array}{r}-a^2c^4\\ \hline\end{array}
\end{array}\right\}=0$$

$$\begin{array}{l}
\overline{\qquad\qquad}\ \overline{\qquad\qquad}-a^2-c^2\\
-a^2-c^2-a^2-c^2\\
\hline
\left.\begin{array}{r}+y^4+2a^2\\-c^2\end{array}\right\}y^2\left.\begin{array}{r}+a^4\\+a^2c^2\end{array}\right\}=0.
\end{array}$$

这表明a^2+c^2是所求的根，用乘法可以容易地证明。

但是当问题所涉及的方程找不到二项式因子时，这问题所依据的方程就一定是立体的，而此时企图只用圆和直线来作图，就犯了一个大错，就如同在一个只要求用圆作图的问题中使用圆锥曲线一样，因为任何无知的表现都可以称之为一个错误。

进一步，我们来讨论具有四次未知数的方程。在消去了无理数和分数后，看一看含有最后一项的因子的二项式能否整除方程左边。如果这样的二项式能找到，则不是它的已知量是所求的根，就是除法运算后所得的方程只有三次，我们应该按同样方法处理。如果找不到这样的二项式，我们必须按已解释过的方法增根或减根，以消除方程第二项，然后将它化为另外一个三次方程。在下面问题中，我们将

$$x^4\pm px^2\pm qx\pm r=0$$

变成

$$y^6\pm2py^4+(p^2\mp4r)y^2-q^2=0。$$

对于不确定的符号：若前一方程出现$+p$,则在后一方程中写为$+2p$；若前一方程出现$-p$，则后一方程写为$-2p$；相反，前者出现$+r$，则后者为$-4r$；前者出现$-r$，后者为$+4r$；但是无论前者中的q是$+$号或$-$号，只要规定x^4和y^6带$+$号，我们总是在后者中写为$-q^2$和$+p^2$；若x^4和y^6带一号，则写为$+q^2$和$-p^2$。例如，给定

$$x^4-4x^2-8x+35=0,$$

变成

$$y^6-8y^4-124y^2-64=0;$$

因为$p=-4$,我们以$-8y^4$代$2py^4$；因为$r=35$，我们把$(p^2-4r)y^2$代换为$(16-140)y^2$或$-124y^2$；因为$q=8$,我们以-64代$-q^2$。类似地，代替

$$x^4-17x^2-20x-6=0,$$

有

$$y^6-34y^4+313y^2-400=0;$$

因为34是17的2倍，313是17的平方加上6的4倍，而400是20的平方。

用同样方法，代替

$$+z^4+\left(\tfrac{1}{2}a^2-c^2\right)z^2-(a^3+ac^2)z-\tfrac{5}{16}a^4-\tfrac{1}{4}a^2c^2=0,$$

我们必须写为

$$y^6+(a^2-2c^2)y^4+(c^4-a^4)y^2-a^6-2a^4c^2-a^2c^4=0;$$

因为$p=\frac{1}{2}a^2-c^2$，$p^2=\frac{1}{4}a^4-a^2c^2+c^4$，$4r=\frac{5}{4}a^4+a^2c^2$，$-q^2=-a^6-2a^2c^2-a^2c^4$。

当方程被降低为三次时，y^2的值将由前述方法找出。如果无法找出，继续解这个方程就无意义了，因为它必然导致一个立体问题。但无论如何，假若y^2的值可以找到，我们总可以利用它将先前的方程分成两个二次方程、两个二次方程的根就是原方程的根。代替$+x^4\pm px^2\pm qx\pm r=0$,两个相应方程是

$$+x^2-yx+\tfrac{1}{2}y^2\pm\tfrac{1}{2}p\pm\frac{q}{2y}=0,$$

和

$$+x^2+yx+\tfrac{1}{2}y^2\pm\tfrac{1}{2}p\pm\frac{q}{2y}=0。$$

对于不确定的符号：若原先p有$+$号，每一新方程中都是$+\frac{1}{2}p$，若原先p有$-$号，则每一新方程中都是$-\frac{1}{2}p$；但是假定q有$+$号，相应于$-yx$，我们写$+\frac{q}{2y}$，相应于$+yx$，我们写$-\frac{q}{2y}$；若q有$-$号，则反过来。然后确

定问题所涉及方程的所有根，继而用圆和直线这一唯一的手段来作图解题就是容易的了。例如，用 $y^6-34y^4+313y^2-400=0$ 来代替 $x^4-17x^2-20x-6=0$，我们发现 $y^2=16$，然后代替原来方程

$$+x^4-17x^2-20x-6=0,$$

写出两个方程 $+x^2-4x-3=0$ 和 $+x^2+4x+2=0$。因为 $y=4$，$\frac{1}{2}y^2=8$，$p=17$，$q=20$，以及

$$+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2y}=-3$$

和

$$+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2y}=+2。$$

得到这两个方程的根，就如同得到含 x^4 的方程的根一样，即一个真根 $\sqrt{7}+2$，三个假根 $\sqrt{7}-2$、$2+\sqrt{2}$ 和 $2-\sqrt{2}$。进而给出方程 $x^4-4x^2-8x+35=0$，我们有 $y^6-8y^4-124y^2-64=0$，又因为后一方程的根是16，我们必须写出 $x^2-4x+5=0$ 和 $x^2+4x+7=0$；因为在这里

$$+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2y}=5,$$

$$+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2y}=7。$$

现在这两个方程都是既无真根也无假根，由此我们知道原方程的四个根都是虚的，而且它的解依赖于这一方程的问题是平面的，但是其作图却是不可能的，因为给定的数值不能互相联系起来。

类似地，给出

$$z^4+\left(\frac{1}{2}a^2-c^2\right)z^2-(a^3+ac^2)z+\frac{5}{16}a^4-\frac{1}{4}a^2c^2=0,$$

因为我们找到了 $y^2=a^2+c^2$，所以应该写

$$z^2-\sqrt{a^2+c^2}\,z+\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}=0,$$

和

$$z^2+\sqrt{a^2+c^2}\,z+\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}=0。$$

因为 $y=\sqrt{a^2+c^2}$ 和 $\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}p=\frac{3}{4}a^2$，以及 $\frac{q}{2y}=\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}$，我们有

$$z=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}},$$

或

$$z=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}}。$$

现在我们已经有了 $z+\frac{1}{2}a=x$，而我们用了所有这些运算来寻找的这个 x 是

$$+\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}c^2}-\sqrt{\frac{1}{4}c^2-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}}。$$

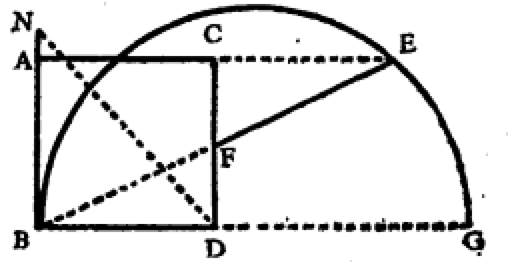

图 1

为了强调说明这一规则的价值，我们应用它来解一道题。给出了正方形AD和直线BN(图 1)，要求在AC延长线上找到一点E，若EB与CD交于F，则EF等于NB。

帕普斯(Pappus)曾指出，如果将BD延长到G，且使DG等于DN，再以BG为直径作一半圆，则所求的点E就是AC延长线与圆周的交点。

那些不熟悉这种作图的人，将不可能发现这一解法，而如果他们应用了这里建议的方法，就绝不会想到利用DG作未知量，而不是用CF或FD，因为利用后两者中任何一个(利用CF或FD)来导出方程要容易得多。他们就会得到一个方程，如果没有我刚才讲解过的规则，这一方程是很难解的。

例如，令 a 代替BD或CD，c 代替EF，x 代替DF，我们有 $CF=a-x$，而且，因为CF与FE之比等于FD与BF之比，我们有

$$a-x:c=x:\mathrm{BF},$$

由此 $BF=\frac{cx}{a-x}$。现在，在直角三角形BDF中，两条直角边的平方和等于斜边的平方，即$x^2+a^2=\frac{c^2x^2}{x^2-2ax+a^2}$。两边同乘以$x^2-2ax+a^2$，我们得到方程

$$x^4-2ax^3+2a^2x^2-2a^3x+a^4=c^2x^2,$$

即

$$x^4-2ax^3+(2a^2-c^2)x^2-2a^3x+a^4=0,$$

利用前面规则，我们知道该方程的根即DF线段的长度为

$$\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}c^2}-\sqrt{\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}}$$

另一方面，如果我们将BF、CE或BE作为未知量，得到一个四次方程，但是更容易解，建立方程也相当简单。

再者，如果使用DG,建立方程将是非常困难的，但是它的解将很简单。我坦率地忠告读者，当提出的问题不是立体的时，如果你使用的方法产生了一个非常复杂的方程，用其它方法，往往能够找到另一个更简单的方程。

我可以为三次或四次方程的解法增加一些不同规则，但它们是多余的，因为任何平面问题的作图都可以利用上面给出的方法完成。

我也可以为五次、六次或更高次方法增加一些规则，但是我宁愿将它们一起考虑，并给出下面一般规则：

首先，尝试将给定方程变成一个可以由两个较低次方程的乘积来得到的同次方程。如果所有可能方法都已尝试过而无效的话，给定方程当然就不能降低次数；接着，如果它是三次或四次的，这问题就是立体的①；如果是五次或六次的，这问题就是更高一级的，如此等等。我在这里也略去了多数陈述的证明，因为它们在我看来是那样地容易，以致如果你不怕麻烦去系统地检验它们，你自己就将得到证明，而且这样去学习这些知识，会比单纯阅读它们更富有价值。

（刘钝译自《Great Books of the Western World》，Vol.31，PP.332—341）

译　后　记

一提到笛卡儿的数学成就，人们必然想到他所创立的解析几何。1637年笛卡儿出版了名著《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》，该书包括三个附录，即《几何》、《折光》和《气象》，解析几何的伟大构思就包含在《几何》（共三卷）中。但是人们较少知道，《几何》一书也是17世纪代数方程论领域的一部奠基性著作。笛卡儿在书中批判性地考察了古希腊数学中的作图问题，以作为阐述其新方法的必要条件，他提出了一系列关于方程论的命题。《几何》卷一名为《只许用直线和圆的作图问题》，卷二名为《曲线的性状》，卷三名为《立体或超立体问题的作图》。本文摘译自《几何》卷三，其核心内容是如何将三次以上代数方程化成一、二次方程。为了使读者更好地了解当时代数学的面貌，我们对原文中一些不够明确或与今天含义不同的术语和概念，均未加改动，只在脚注中适当说明，标题也是我们加的。

（刘　钝）

① 系指须借助圆锥曲线来完成其作图的问题。