

起源于中国——重写现今计数制的历史

〔新加坡〕 蓝丽蓉

1. 引言

我在论文《现今计数制和代数符号形式的概念起源》^①（以下简称论文1）和《联系：探究中国筹算计数制与现今计数制的相似性》^②（以下简称论文2）中，曾提出下述论点：中国是最早的文明古国，它具有我们现今计数制、又称之为印度-阿拉伯计数制的概念。本文将简要叙述已经提出的主要观点，并且研讨新的证据，以支持更进一步的论点——现今计数制来源于中国筹算计数制^③。

2. 证据的探究

1. 我将从扼要陈述论文1中展开的论证开始。一种计数制可以用不同于另一种的记数法来表示，这并不是反对前者起源于后者的实质性论证。对于起源问题，更重要的是它们的概念是否相似，而不是它们的记数法是否相似。我曾强调指出了区分数学概念的进化和表达已有概念不同形式的进化的重要性。对前一种情况，需要天才或近乎天才的人，才能提出具有深远意义的概念；而后一种情况，则任何人都能完成，只要他已充分理解概念，并能提出更好的方法来表达它。自然，这些表示方法应该在形式或记法上能做到因时和因地制宜。

中国算筹数字开始采用，应不迟于战国时期（公元前480—221年），当时纸尚未发明，书写手段极其困难。从记数法来说，中国的计数制与我们现今使用的计数制是极为

不同的，甚至使用的工具也很不同。然而，如果我们超出它们的记数法，考察一下它们的基本概念，我们就会发现惊人的相似性。我们现今的计数制有三个核心特征：（1）九个符号和零的概念；（2）位值制；（3）十进制。中国的筹算计数制具备全部这三个特征^④。因此，仅依据应用算筹这个事实——因而具有不同于我们现今计数制的记数法，并不能证明后者不起源于中国之说。

2. 在古代各计数制中，仅有筹算计数制与现今计数制在这三个核心特征方面相同。巴比伦人的楔形数字和玛雅人的数字都有位值特征，但都不是十进制的。而埃及人的象形数字，希腊人的字母数字和罗马人的数字，都没有位值制。正因如此，这些计数

* 本文主要内容曾于1987年4月26日~5月2日在上沃尔法赫(Oberwolfach)数学研究所召开的数学史会议上宣读。

①载《精密科学历史档案》，1986，36：183-195。

②载《精密科学历史档案》，1987，37：365-392。

③对应于个位数字的算筹的九个符号可分为两类，即
A(纵式)：| Ⅱ Ⅲ Ⅳ Ⅴ Ⅵ Ⅶ Ⅷ Ⅸ
B(横式)：— 二 三 四 五 上 六 七 八 九
A行数字用于个位、百位、万位、……等位；B行数字用于十位、千位、十万位、……等位。例如：用算筹4783记作
Ⅳ Ⅶ Ⅷ Ⅲ。以空位表示零，如902记作 Ⅸ 〇 Ⅱ，9002记作
〇 〇 〇 Ⅱ。

④虽然算筹的九个符号分为纵式和横式两类，但这两类实质上是同一概念。因为算筹用在纵式中是垂直放置，用在横式中就水平放置，反之亦然。用九个符号纵横交错表示位置，这真是个巧妙的办法。因此不需要诸如标有纵列的那些特殊的计算板（事实上，任何平坦的表面都可当作计算板）。

制需要不同的记数法来表示数 1, 2, ……,
9; 10, 20, ……, 90; 100, 200, ……,
900; 等等。结果, 随着数字增多, 不得不
采用更多的记数法。来自 佉卢(Kharosthi)
和婆罗米(Brahmi)文字的两种古代印度计
数制, 也都属于这一类。甚至中国的书写数
字也不具备所有上述三个特征。中国书写数
字的计数是十进制的, 应用个位的九个数字。
除此, 还有一些表示十的幂次数的名称, 它
们的作用是说明个位的九个数字所在的位
数。

3. 一些学者, 如卡乔里(F. Cajori)、丹
茨(T. Dantzig)、史密斯(D. E. Smith)、卡
平斯基(I. C. Karpinski)和门宁格(K. Men-
ninger)等人, 都对现今计数制的起源进行
过认真研究, 并认为它起源于印度; 但与此
同时, 他们也承认, 至于如何起源, 也难以
回答。假定起源于印度的说法大体上根据三
个理由: (1) 个位数字的形状来源于印度;
(2) 描述这些数字的阿拉伯文原著称它们为
印度数字, 并通过阿拉伯文著作把这些数字
传到了欧洲; (3) 某些印度数学论著的算术
题目, 与现今计数制有关的题目非常相对
应(实际上, 中国的数学论著中也有这样的
题目; 见下文)。关于这些数字形状来源
于印度的说法, 人们一般认为它们来源于
婆罗米数字。然而, 我已经指出, 婆罗米
计数制并不使用位值。

印度人自己并不了解现今计数制是如
何起源的。达塔(B. Datta)和辛格(A. N. Sin-
gh)都说不知道它的发明者。早期的印度
数学论著中并没有这些数字的描述, 也没
有任何论著指出过与此计数制有关的算
术运算步骤。以十进制位值记数法书写
的数字, 在印度最早见于595年的碑文。

4. 由于筹算计数制在三个核心特征方
面是与现今计数制相同的唯一的古代计
数制, 如果现今计数制的起源与此无关,
那么这些特征又是如何出现的, 则需要
作出解释。为

了支持起源于印度的假说, 学者们把注
意力集中在零这个符号的重要性上。然
而在印度, 最早碑文上出现零是在870
年, 是在最早的数字碑文出现之后二百
七十年。一些根本问题, 诸如“零的概
念是怎样产生的?” “零怎样得到作为
一个数字的地位的?” 等等, 至今还没
有得到满意回答。

另一方面, 零的概念的存在和在筹算
计数制中把它作为一个数字看待, 则有
一种逻辑上的解释。零的概念是位值
计数制特有的; 这就是为什么零存在
于巴比伦人的数字、玛雅人的数字和
中国人的筹算数字中的缘故。零不出
现在在不具备位值特征的计数制中。
中国人用空位表示零, 当他们在有空
位的数字上完成算术四则运算时, 零
的概念就提高到与其它九个符号同等
的地位; 换言之, 把零看作了一个数。

5. 筹算计数制在中国普遍应用了
两千年之久, 直到大约十七世纪。只
要商人以及官员们(他们之中有些是
旅行者)需要计算, 就使用它。很难
想像, 这样一种适用于物物交换和在
中国应用了如此长时期的实用而又相
对简单的工具, 在5世纪或6世纪时
没有传到印度。人们一旦掌握了筹
算制概念, 就可以以任何形式写出
九个数字, 而它们自然会以与印度
文化和谐一致的形式出现。

至于最初以空位形式传播零的概
念, 我在论文2中曾解释说, 因为筹
算数字的九个符号有纵式和横式两
类, 所以在筹算板上观察空位和决
定空位位置并不太困难; 如果筹
算计数制的概念变换成只使用一套
九个符号的书写形式, 那么区分空
位和推断空位出现的次数就很困难
了。因此不可避免的是, 零的概念
不得不用一个符号来表示。在印度,
零记作一个点或一个圈。

6. 正像中国计算方法的知识曾传
播到印度一样, 这些知识也同样会
沿着通商路线或与中国人交往, 传
播到不同地区的各民族。筹算数字
概念也可能沿两条不同路线传播到

两个不同地方，结果适合于当地的书写记数法，也就会有根本差别。

这是对迄今为止令人费解的下列事实的一种似乎可行的解释：在阿拉伯国家发现了两种不同形式的印度-阿拉伯数字，即东阿拉伯数字和西阿拉伯数字。东阿拉伯数字的零是用一个点表示，而西阿拉伯数字则根本没有零。西阿拉伯数字（又称gubar数字）有点置于数字之上，以表示数字的位序：一点表示十位，二点表示百位，三点表示千位，等等。因此， $\overline{7}62 = 762$ ，而 $\overline{7}6 = 706$ （我们现今使用的数字形式比起东阿拉伯数字来说，更类似于这些数字）。

如果这两种阿拉伯计数制中有一种是由另一种产生的，或者如果这两种都共同起源于印度的计数制，那么我们就很难解释它们在记数法上的根本不同。因为所有这三种计数制都有它们的书写记数法，很难想像一种书写方法在它传播到如此邻近的两个地区的过程中能够经受那样明显的变化。

然而，如果两种阿拉伯计数制都是通过不同路径从中国筹算计数制传播来的，那么就没有什么不可理解之谜了。因为中国的筹算计数制不是以书写记数法表示的，当两个地区分别把筹算译成书写数字时，可以预期，会得到相当不同的结果。

注意到下述事实是很有意思的：吉尔伯特（Gerbert，即教皇西尔维斯特二世（Pope Sylvester II））在1000年前后从西班牙回来时，他引入了标有gubar数字的筹码（apices）。这些筹码用来在一块标有纵列的板上进行计算，并且以空位代表零。这种计数制非常类似于筹算计数制。

现已在柬埔寨和东南亚其它地区发现了一个点或一个圈表示零的7世纪时的碑文。这比在印度发现的最早碑文大约要早二百五十年。在讨论这一有意义的事实时，李约瑟提出的问题是，刺激可能来源于中国筹算板上为零留下的空位。上述筹算计数制的

传播说，可能恰好提供了答案。

7.至此，我已论证筹算计数制与现今计数制在三个核心特征方面在概念上是完全一致的。通过贸易传播的可能性，为现今计数制起源于中国提供了强有力的论据。现在我将详细说明一个更加有力的论据。

这两个计数制不只是概念上完全一致；更有意义的是，它们在算术四则运算中有完全一致的过程。因为采用一种计算过程的问题，只是一个习惯问题。所以，如果两种文化采用了完全一致的算术过程，那么对于断言有着一整套习惯的这种文化首先把计算过程传播给了另一种文化，这就是非常强有力的理由了。

在论文2中，我翻译了《孙子算经》中所述的用筹算数字进行乘除运算的过程。从这两种方法，我推断了古代中国人进行加减运算时所采用的过程。我把这四则运算的过程与三种阿拉伯著作中所述的相应运算的过程进行了比较，这三种阿拉伯著作是：（1）现仅以拉丁文译本保存的9世纪默罕穆德·伊本·穆萨·花拉子米（Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi）的算术著作。该著作叙述了减法、乘法和除法；未提及加法。（2）阿布·乌格利迪西（Abu al-Uqlidisi）著于952年的《印度算法要旨》（Kitāb al-fusūl fi al-hisāb al-hindī）。（3）库希亚尔·伊本·拉班（Kushyar Ibn Labban）可能著于1000年左右的《印度算法原理》（Kitāb fi usul hisāb al-hind）。我得出的下述结论：（1）加法和减法运算是相同的；（2）虽然乘法步骤是相同的，但格式稍有不同，因为中国方法中的前两行，在阿拉伯方法中是以一行出现的；（3）阿拉伯著作中的除法运算和中国的方法相同，都清楚地记下余数。

花拉子米的书于12世纪丁时译成拉丁文。它是把新的命数法系统传到欧洲的第一部著作。书中有用阿拉伯数字进行乘和除的

许多方法；在写于400年左右的中文著作中和写于825年左右的阿拉伯文著作中，关于乘和除这两种运算的详细步骤是相同的，这个事实是值得注意的现象。当我们考虑到双方的计算工具是如何不同时，那么就更值得注意了。尽管乘和除过程是筹算计数制的一种自然产生的过程，但是事实上那些过程并没有导致书写计数制。人们看到，正是那些过程最早出现在伊斯兰的著作中，使得人们得出它们完全来自非书写计数制的结论。

除法的帆船法，又称逐位划掉法，在15世纪的欧洲是很流行的。这种方法可以描述为，试图用更详细的书写形式表示起源于中国-阿拉伯的除法，由此导致省略了各种中间步骤。

当我们把注意力转到研究其它计算运算时，如求平方根和立方根，就会遇到类似事实。阿拉伯人求一个数的平方根的方法与中国人的方法类似；15世纪时帕乔利(L. Pacioli)应用过这种过程，但他所用的消去技术与在帆船除法中的相同。

8. 在论文2中，我翻译了《孙子算经》和《夏侯阳算经》中的段落，用以证明中国人的分数概念来源于除法问题的余数，而且它的记数表示方法继承了计算板上的除法的余数形式。因此，如果 $729\frac{2}{9}$ 是一个除法问题的答案，它可表示为

$$\begin{array}{r} 729 \\ 2 \\ 9 \end{array} \quad \text{或以筹算数字表示} \quad \begin{array}{l} \text{II} = \text{III} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array}$$

在上面提到的著作中解释了中国的分数记数法就是从这样一种表示方法导出的，所以像分数 $\frac{2}{9}$ 表示为 $\frac{2}{9}$ 的形式，即 $\frac{2}{9}$ 。在这些著作中，也定义了分数的分子和分母的概念。

因为三部阿拉伯著作中的除法过程与中国著作中的相同，所以它们表示分数的形式也与中国相同。也就是说，完全一致的除法

过程导致了完全一致的表示分数概念的形式。我们现在表示普通分数的记数法有一水平的分数线，它可能是在12世纪时开始采用的。

我已指出，采用一套过程仅仅是一个习惯问题。分数用一种特殊形式表示，也只是一个习惯问题。例如，古代埃及人和希腊人表示分数时完全不同；埃及人只有单位分数记数法，而希腊人则采用音调符号或其它方法，以区别分数与字母数字。因此，阿拉伯人和中国人有完全一致的分数表示形式这一事实，不能认为纯属巧合而不予考虑。我们已经知道，中国人在更早得多的时期发明了这些形式，这就提出了一个相当重要的情况，即除法的运算过程和分数记数法起源于中国。由此，加强了现今计数制起源于中国的论证。

3. 早期数学方法的比较

我在本文中已提出，我们现今使用的计数制概念的起源可追溯到筹算计数制；后来这个概念传播到了印度，还可能传播到了其它地区，译成了各种书写形式。我还指出了，这不仅是一套新数字的传播，而是从基本算术运算开始的完全不同的计算体系的传播。

在印度、阿拉伯和欧洲，新的计算方法引起了算术发展的新高涨。称为商业算术的实用计算方法，诸如分数、三率法、比例和假位法等，受到了重视。

关于印度-阿拉伯计数制的早期发展史及其对数学的影响，至今已进行了许多研究。然而另一方面，西方文献中关于中国筹算计数制的有限知识，可能会使人得出结论说，因为中国筹算是一种机械算具，这种算法不可能产生超出算术四则运算的结果。这种假设实在是错误的。要写出产生于应用筹算计数制的数学方法，实际上相当于撰写相当大部分中国传统数学史的艰巨任务。人们不需要超出《九章算术》，即可说明诸如分

数、三率法、比例和假位法等等概念，因为在该书都有详细讨论、并附有许多例题。这些“商业算术”问题，在中国数学著作中是常见的。

在16世纪的欧洲，发现了用分数数字进行计算的更简易方法，那时在整数的个位右边放置数字来表示这些分数。实际上，这种十进制小数的概念，是刘徽在3世纪使用算筹数字时最早发现的。新的数字及其有关的算术为欧洲代数学的发展提供了原动力。早期阶段包括解一次和二次方程，它们又导致了解不定方程和高阶数字方程。这种发展的类似模式，也可在更早些时候的中文著作中追溯其踪迹。

因此，大量中国古代和中古代的数学著作表明，通过应用算筹，发展和得到了具有三个核心特征内在特性的计数制。

4. 结 论

印度-阿拉伯数字在12世纪通过花拉子米论新算术著作的拉丁文译本传到了欧洲。新的计数制经历了四百年之久，才最终在欧

洲确立了其至高无上的地位。新计数制的传播，受益于日益容易得到的纸张的使用和印刷术的引进。实际上，正是印刷术导致了九个数字形状标准化。新数字引进欧洲是极为适时的——在欧洲中世纪末期与文艺复兴初期。新计数制的范围和潜力的发展，是与新时期学术活动的高涨相符的。新计数制最终奠定了近代数学的基础、导致了该学科的普及。

中国筹算计数制的应用，使得数学在古代和中古代整个时期中得以持续发展。该计数制内在的和实用的特性，可以说明为什么直到17世纪它仍在应用，虽然到那时它的形式已变得过时了。终于中国人也逐渐顺利而毫无改变地采用了西方已采用了的印度-阿拉伯数字。但是他们未曾理解，这个计数制实际上正是他们自己的筹算计数制，只是随着人类的变化和进步，概念也发生了变化和进步罢了。

(王 冰 译自《精密科学历史档案》
Vol. 38, NO. 2, 1988,
pp. 101—108)

(上接第30页)

许他只是装糊涂，经常有人这样认为。但我以为更有可能的是其它三个原因。第一，这个论证本身决不是一件简单的或直观上一目了然的事情。即使用足够的图表(伽利略没有提供)也难以作出清楚而恰当的说明。第二，他在《对话》中为这个证明所安排的位置不大高明，它应当放到第三天快结束，讨论过哥白尼的第三运动之后。第三，有几乎无可辩驳的证据表明，伽利略是在临近完稿时

提出他的证明的，离《对话》付印之前只有几个月。大概当时过份仓促(而不是缺乏认识)是使伽利略没有能很好地利用这个证明的原因。遗憾的是，这一证明比伽利略不惜化费大量时间和精力利用潮汐所作的论证有价值得多。

(钱善璿译自《ISIS》，1985，
76, 543—551, 丁蔚校)