《自然科学史研究》 第 34 卷 第 2 期(2015 年):142—163
Studies in the History of Natural Sciences Vol. 34 No. 2(2015)

萨拉夫·丁·图西三次方程数值解的研究

郭园园

(中国科学院自然科学史研究所,北京 100190)

摘 要 文章在全面解读阿拉伯数学家萨拉夫·丁·图西(Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī,1135 ~ 1213)《方程》(1209 年)一书的基础上,着重分析了其中的三次方程数值解法,得出它们是在已有开方算法的基础上有规律性地构造出来。另还将其与同时代中算家秦九韶的相似算法作比较,得出二者的核心算法相同,但是由于各自数学传统的差异又表现出明显的不同。该研究对于进一步认识图西三次方程数值解算法的构造思想以及探究中阿数学在相似问题上各自的特点与传统有积极意义。

关键词 萨拉夫·丁·图西 奥马尔·海亚姆 秦九韶 三次方程数值解

中图分类号 N091∶O11

文献标识码 A **文章编号** 1000-0224(2015)02-0142-22

0 绪 论

萨拉夫·丁·图西(Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī,1135 ~ 1213)在其数学代表作《方程》[1](1209 年)一书中系统地讨论了一元三次方程的几何和数值解法,尤其是其中的数值解法具有明显东方数学算法的特点。由于语言和史料的因素,以往对此的研究不多。1974 年法国数学史家拉舍德(Roshdi Rashed)曾撰文就其进行过研究[2];1984 年拉舍德在其关于阿拉伯算数、代数的著作[3]中自引了前者中的相关内容,1994 年该书被译为英文[4];1986 年他将《方程》一书编译成法语阿拉伯语对照版本出版[1]①。

林力娜(Karine Chemla)在其 1994 年关于中阿开方法比较研究的论文[5]开始部分指

收稿日期:2014-01-20; 修回日期:2015-01-23

作者简介:郭园园,1981 年生,助理研究员,主要研究方向为阿拉伯数学史。

基金项目:中国科学院自然科学史研究所重点培育方向项目“13 ~ 15 世纪阿拉伯高次方程数值解研究”(课题号:Y45001211G);教育部人文社会科学研究项目“沿丝绸之路数学知识的传播与交流”(课题号:12YJAZH037)。

① 其为拉舍德于 1986 年对萨拉夫·丁·图西《方程》进行校译后,出版的法语阿拉伯语对照版,其中阿拉伯语部分为排版印刷字体。笔者下文中涉及图西三次方程数值解部分的译文以及数理分析等相关内容全部是基于参考文献 1 中的阿拉伯语部分完成。由于现存的阿拉伯数学史料均是以抄本形式存在,加之阿拉伯语特殊的书写方式必然会对研究者,尤其是不以阿拉伯语为母语的学者造成文字识别和解读上的困难。以拉舍德等权威学者的校订本文献进行研究是目前西方学界认可的研究方式。

出：20 世纪对于阿拉伯开方法的研究最早可以追溯到德国数学史家勒基（Paul Luckey，1884～1949）的工作，他于 1942 年著文对阿拉伯数学家阿尔·卡西（al-Kāshī，约 1380～1429）《算术之钥》（*The Key of Arithmetic*）中的高次开方算法进行研究，指出其与今天"鲁菲尼-霍纳"算法相同，同时指出比卡西更早的中算家们也利用此法进行高次开方甚至求解代数方程。该观点后来影响了尤什科维奇（A. P. Youschevitch，1906～1993）和杜石然等学者。1974 年拉舍德发表了关于萨拉夫·丁·图西代数方程数值解研究的文章[2]；1978 年拉舍德著文指出萨玛瓦尔（al-Samaw'al，约 1130～约 1180）1172 年所著书中也使用了类似卡西的算法，据此他拒绝承认卡西开方算法中算来源的观点。但是这并不能排除中算对于早期阿拉伯开方算法影响的可能性，故随后林力娜将早期中阿开方算法进行比较研究。2012 年林力娜针对卡茨（Victor J. Katz）2007 年出版的通史性著作写了一篇书评[6]，该书第五章关于阿拉伯数学的内容是由柏格伦（Lennart Berggren）完成。在涉及卡西开方算法时，林力娜基本重复了 1994 年论文中的内容并指出柏格伦并未提及近些年的新近研究成果，例如萨拉夫·丁·图西的《方程》。接下来林力娜展开论述指出：一方面拉舍德在研究过程中对图西的算法过程重新构造①，表现出与卡西算法的相似性；另一方面仍可以看出其与中算相似之处，对于此书值得进一步深入研究。到目前为止西方学者还未较系统地分析图西所给出的三次方程数值解法的来源和构造思想。

在国内，包芳勋基于拉舍德的研究工作[4]进行过相关研究，他首先指出：

> 现存的阿尔·徒思的著作是原作的抄本，抄本的作者删掉了阿尔·徒思原作中的表格，并对文中的冗长段落进行了压缩。下面给出的表格是拉塞德（R. Rashed）依据抄本原表格的附文重新构造的。[7]

笔者通过研究发现，由于包芳勋没有基于原始文献，故在整个研究过程中，对于文献的认识、论证和结论等方面存在诸多问题。此外甘向阳[8]曾尝试将图西所给三次方程数值解法与中算"带从开方"算法进行比较，尽管他基于拉舍德 1986 年图西《方程》校译本中的法语译文②，但是与拉舍德一样，由于缺乏对阿拉伯文献中各方程算法本质的把握，所以在中阿算法比较的认识上并没有实质性的突破。

下文中笔者将图西著作中所有的三次方程数值解内容从问题来源、算法构造等方面进行系统梳理分析，此外还将其与中算秦九韶《数书九章》中的相似内容尝试性地进行比较研究。

1 背景

中世纪阿拉伯数学家们在代数学领域取得了辉煌的成就。今天"代数"一词源于阿拉伯语"还原"（al-jabr），它最早可以追溯到 9 世纪阿拉伯数学家花拉子米（al-Khwarizmī，约

① 此处林力娜指的是参考文献[2]～[4]。拉舍德将图西原始文献中针对每一个方程求解过程中一幅幅分散的算表整合为一张算表，笔者认为这样解读有些过度诠释，在文献[1]中，拉舍德不再使用此方法表述。

② 尽管拉舍德在 1986 年的权威对照译本中针对图西方程数值解进行了大量的数理分析，但其本质是利用现代数学思想和方法对算法的正确性进行证明，并没有剖析出不同方程算法间的本质联系及算法的演化脉络。

780 ~ 约 850) 《代数学》①一书，该书的全名为《还原与对消之书》(*kitāb al-jabr wa al-muqābala*) 。在书中他将“还原”定义为这样一种运算，即将方程一侧的一个减去的量移到方程的另一侧变为加上的量，例如: $5x + 1 = 2 - 3x$ 变为 $8x + 1 = 2$，这就是一个“还原”过程; 单词“wa”是“和”的意思，“al-muqābala”的意思是将方程两侧的同类项消去，此处译为“对消”，例如: $8x + 1 = 2$ 化为 $8x = 1$，这就是一个“对消”过程。后世的阿拉伯数学家们逐渐用“还原”一词来代替整个还原与对消算法，最终其演变为今天的“代数”(algebra) 一词。

当时的阿拉伯数学家仅考虑含有正根的方程，很明显通过这两步运算任何方程都可以化为一些正项之和等于另外一些正项之和的形式。在花拉子米的书中线性方程和二次方程则一定可以化为如下 6 种形式之一:

$$ax^2 = bx, ax^2 = b, ax = c, ax^2 + bx = c, ax^2 + c = bx, bx + c = ax^2 (a, b, c > 0),$$

随后花拉子米将上述方程的二次项系数化为 1，这需要将方程两侧的各项系数进行相应的比例变化，则上述方程化为下面的 6 种标准形式:

$$x^2 = mx, x^2 = m, x = m, x^2 + mx = n, x^2 + n = mx, mx + n = x^2 (m, n > 0)。$$

接下来，花拉子米给出方程的解法。尤其是针对后三种方程，花拉子米给出与今天相同的公式解法，并附上基于“贴补”法的几何证明。在这门学科发展的初始阶段，“代数”的含义是将含有未知数的线性及二次方程转化为标准形式，然后套用公式求解。花拉子米的这本书基本确立了后世阿拉伯代数学中: 方程化简和方程求解这两条主要发展脉络。

花拉子米在上述方程化解过程中需要将基本的算术方法应用于未知量，相当于今天的多项式理论。后世阿拉伯数学家们在此领域首先取得突破性进展的是凯拉吉(al-Karajī, 953 ~ 约 1029) ②，他首先提出“算术化代数”③这一概念，其继任者萨马瓦尔④对此的解释是:

将所有的应用于已知数上的计算方法按照相同的方式应用于未知数。[9]

其相当于系统地将加、减、乘、除、比例和开方这几种基本算术方法应用于代数表达式。在方程求解方面，与花拉子米同时代或是稍晚的数学家们，例如塔比·伊本·库拉(Thabit ibn Qurra, 836 ~ 901) ⑤、阿布·卡米尔(Abu Kamil, 约

---

① 花拉子米《代数学》一书的译本及研究文献较多，较为权威的译本读者可以参考: Roshdi Rashed. *Al-Khwārizmī Le Commencement del'Algèbra* [M]. Librairie Scientifique et Technique, 2006. (法阿对照本) ; Roshdi Rashed. *Al-Khwārizmī: The Beginnings of Algebra* [M]. SAQI, Landon, 2009. (英阿对照本)

② 凯拉吉相关代数学著作的全本已经遗失，关于其残本较为权威的研究文献读者可以参考: F. Woepcke. *Extrait du Fakhr, traité d'algèbre par Abou Bekr Mohammed Ben Alhacan Alkarkhi* [M]. Reprint of the 1853 original (Hildesheim, 1982) . (法文)

③ “算数化代数(Arithmetization of Algebra) ”这一译法是由拉舍德提出，关于其较为权威的研究文献读者可以参考: R. Rashed. *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra* [M]. A. F. W. Armstrong (trans) . Kluwer Academic Publishers, 1994.

④ 尽管上述凯拉吉的代数学著作全本已经遗失，但是萨玛瓦尔在其代数学著作《光辉代数》中大量转引了相关内容。目前《光辉代数》研究较少，唯一的校订本是: S. Ahmd and R. Rashed eds. , al-Samaw'al, *al-Bahiren algebra* [M]. Damascus, 1972. (正文为阿拉伯语，序言为法文)

⑤ 塔比·伊本·库拉相关著作较为权威的校译本读者可以参考: Regis Morelon. *Thabit ibn Qurra Œuvres D'Astronomie* [M]. Volume public avec le concours du C. N. R. S, Paris, 1987. (法阿对照本)

850 ~ 约 930) ①等人,他们在二次方程“希腊化”几何解法方面,以及可以化为二次方程的特殊高次方程求解方面取得了一些成就。但首先在一般高次方程求解领域取得突破性进展的是奥马尔·海亚姆(Omar Khayyam,1048 ~ 1131) ②。

2　从奥马尔·海亚姆到萨拉夫·丁·图西

海亚姆在其著作《代数论》(*Treatise on Algebra*) [10] 中,与其先辈们相同,在仅考虑正根与正系数的前提下,首先给出了三次及以下全部 25 种方程的分类,按照其著作中的顺序各方程标准形式如下:

涉及两项的情形:

1 ~ 6: $x = a$, $x^2 = a$, $x^3 = a$, $x^2 = ax$, $x^3 = ax$, $x^3 = ax^2$。

涉及三项的情形:

7 ~ 9: $x^2 + ax = b$, $x^2 + b = ax$, $ax + b = x^2$;

10 ~ 12: $x^3 + ax^2 = bx$, $x^3 + bx = ax^2$, $ax^2 + bx^2 = x^3$。

(10 ~ 12 类为 7 ~ 9 类方程的齐次变形)

13 ~ 15: $x^3 + bx = c$, $x^3 + c = bx$, $x^3 = ax + b$;

16 ~ 18: $x^3 + ax^2 = b$, $x^3 + b = ax^2$, $x^3 = ax^2 + b$。

涉及四项的情形:

一项等于三项的情形:

19 ~ 20: $x^3 + ax^2 + bx = c$, $x^3 + ax^2 + c = bx$;

21 ~ 22: $x^3 + bx + c = ax^2$, $ax^2 + bx + c = x^3$。

两项等于两项的情形:

23 ~ 25: $x^3 + ax^2 = bx + c$, $x^3 + bx = ax^2 + c$, $x^3 + c = ax^2 + bx$。

海亚姆最大的贡献在于他对这 25 类方程均给出了基于希腊数学知识的几何解法,尤其是对方程 13 ~ 25 分别利用两条圆锥曲线相交的方法给出其几何解,本质上是利用圆锥曲线交点对方程的解进行定性描述。正如海亚姆在书中的序言部分所指出:

> (以往的代数学家们) 利用不完善的方式涉及过其中几种类型,除此之外在他们的书中找不到这六类方程③。下面我会解释它们并利用几何而不是数字的方式说明,且它们只能通过圆锥曲线的方式说明。至于四项的复合方程则可以分为两类,第

---

① 有关阿布·卡米尔相关著作的研究,学界在较长时间内依赖的是基于希伯来文的译本: Martin Levey. *The algebra of abu Kamil, kitab fi al-jabr wa'l-muqabala* [M]. in a commentary by Mordecai Finzi, Hebrew text, translation, and commentary with special reference to the Arabic text, the University of Wisconsin Press: Madison, Milwaukee, and London, 1966. (英语希伯来语对照本) 。另拉舍德最近出版了更为权威的校译本: Roshid Rashed. *Abū Kāmil Algèbre et analyse diophantienne* [M]. De Gruyter, 2012. (法阿对照本)

② 奥马尔·海亚姆相关著作较为权威的校译本读者可以参考: R. Rashed, B. Vahabzaded. *Al-Khayyam Mathématicien* [M]. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1999. (法阿对照本) 。2000 年,基于上述版本,该书被译为英文: R. Rashed, B. Vahabzaded. Omar *Khayyam The Mathematician* [M]. New York: Bibliotheca Persica Press, 2000. (英译本,不包含阿拉伯语部分)

③ 此处指的是上述方程 13 ~ 18。

一类是三项等于一项的情况，包括四种…因此共有七类四项方程①，除了几何的方法，我们还没有发现其他的任何方法来求解此类问题…对于这些类型方程的证明只能利用圆锥曲线的性质才能成功。下面我们将对这 25 种类型方程一个一个地进行证明，我们将祈求真主帮助我们。那些对真主虔诚的人会在真主的庇护下走向成功之路。([10]，127 ~ 129 页)

除去几何方式的求解以外，海亚姆还在前人的基础上对于前 12 种方程的数字方式的解法进行简要说明。对于前 6 种方程主要借助于相当于今天的开平方、开立方运算。例如，对于第 2 类方程 $x^2 = a$，海亚姆指出:

第二类，数等于平方…若要求出其数字形式的方根仅能通过推导的方式，例如若有人知道 25 的平方根为 5，则他是通过推导的方式得出，而不是通过这门学科中的方法，对于这点你们不必考虑这门学科中对此存在不同观点人的言论。印度人有一种严格的推导方法来求解平方及立方的根，这需要知道 9 个数字的平方，我的意思是 1 的平方、2(的平方) 、3(的平方) 等; 同样还需要知道它们之间的乘积，我的意思是 2 与 3 的乘积等。我已经写了一本证明这些算法的正确性，事实上它们完全满足要求; 且我已经讲过了各种不同的类型，我的意思是求平方平方的根，平方立方的根，立方立方的根②，无论(此数) 有多大，在我之前没有人做过这项工作。但是这些说明全部是基于《原本》中算数章进行的数字形式的说明。([10]，131 页)

海亚姆此处提到的书名为《算数问题》，已经遗失[11]。此处的论述表明在《算数问题》一书中他论述了印度数学中的开平方和开立方方法，并将这种方法推广至求任意正整数方根; 此外他还利用《原本》中的算数知识以纯粹算数的方式证明了这种算法的正确性。至于方程 7 ~ 12 的数字方式解法，海亚姆简要复述了花拉子米的公式解法。

海亚姆的继任者萨拉夫·丁·图西已经不能满足于这种对于方程解“定性的描述”，图西在其《方程》一书中对于海亚姆的上述内容进行了全面的发展，在方程的“定量求解”方面迈出了重要一步。图西在《方程》的序言中复述了海亚姆关于三次方程的 25 种分类，甚至二者关于上述复杂方程第 13 ~ 25 的分类顺序完全相同。图西首先关注的问题是方程的可解性，他将原 25 种方程分为两类加以论述: 第一类是必存在正根的方程; 其二是可能存在正根的方程。其中第二类方程包括上述海亚姆书中的方程 14、17、21、22、23，海亚姆在对这五类方程利用圆锥曲线相交求解的过程中，很明显得到两条曲线可能相交，也可能不相交。但海亚姆仅是对有交点情况进行了证明，并没有对方程可解的条件进行讨论。图西将剩余的 20 种方程按照原有顺序加以论述，作为其《方程》一书的第 1 卷，可能有解的 5 类方程作为第 2 卷。为了便于下文表述，现按照《方程》中行文顺序对 25 种方程重新编号，如下所示:

卷 1: 必有解的 20 种方程

1 ~ 6: $x = a$，$x^2 = a$，$x^2 = ax$，$x^3 = ax^2$，$x^3 = ax$，$x^3 = a$;

7 ~ 9: $x^2 + ax = b$，$ax + b = x^2$，$x^2 + b = ax$;

① 此处指的是上述方程 19 ~ 25。

② 此处海亚姆指的是求解 4、5、6 次方根。

$10\sim12$：$x^3+ax^2=bx$，$ax^2+bx=x^3$，$x^3+bx=ax^2$；

$13\sim16$：$x^3+ax=b$，$ax+b=x^3$，$x^3+ax^2=b$，$ax^2+b=x^3$；

$17\sim20$：$x^3+ax^2+bx=c$，$ax^2+bx+c=x^3$，$x^3+ax^2=bx+c$，$x^3+bx=ax^2+c$；

卷 2：可能有解的 5 种方程

21：$x^3+b=ax^2$；22：$x^3+b=ax$；23：$x^3+ax^2+c=bx$；

24：$x^3+bx+c=ax^2$；25：$x^3+c=ax^2+bx$。

在第 1 卷中，图西对于每一种方程首先给出了与海亚姆相同的几何解法，区别在于图西首先证明了解的存在性①，这使得其几何解法更加严格化；随后在每种几何解法的后面给出了其数值解法，这也是本文后面讲着重讨论的内容；在第 2 卷中图西对于 5 种可能有解的方程进行全面的数理分析。例如对于第 24 类方程 $x^3+bx+c=ax^2$，书中首先分析了其可解条件：

$$\begin{cases}\sqrt{b}<\dfrac{a}{2};\\ x_0\text{ 满足 }x_0>\dfrac{a}{2}\text{，且 }x_0^2+\dfrac{1}{3}b=\dfrac{2}{3}ax_0\text{，此时 }c\text{ 存在极大值 }c_0\text{，}\begin{cases}c>c_0\text{，方程无解；}\\ c=c_0\text{，方程有唯一解；}\\ c<c_0\text{，方程有两个解。}\end{cases}\end{cases}$$

随后对方程有两个解时，各个解的取值范围、以及如何将原方程转化为第 15 和第 21 类方程求解、三类方程之间的关系等问题均进行了详尽的分析，此外对于这 5 类方程，图西没有给出在海亚姆书中已有的对应几何解法。

3　图西三次方程数值解法题例

图西指出复合方程 $7\sim25$ 均可以利用“数字方式”求解，其算法属于今天高次方程数值解内容。对于二次方程 $7\sim12$，图西指出方程 8 可以转化为方程 7 求解；方程 $10\sim12$ 为方程 $7\sim9$ 的等价齐次变形。故对于 6 种二次方程，图西仅对方程 7、9 的数值解法进行完整论述。对于三次方程 $13\sim25$，图西指出方程 $22\sim25$ 在有解的情况下均可转换成方程 15 和方程 21 来求解，故对于 13 种三次方程，图西给出了 $13\sim21$ 这 9 类方程完整的数值解法。综上所述，在图西《方程》一书中共给出 11 类方程完整的数值解法。对于这 11 类方程的数值解法，图西均采用了相似的体例进行论述，下面以第 14 类方程：$ax+b=x^3$ 为例进行说明。

这里需要首先介绍一下图西在论述过程中的一些常用术语：

1. 在描述方程时，常数称为“数”或“数字”，一次项系数称为“根的数”，二次项系数称为“平方的数”；

2. 在初次系数布式的过程中首先写出常数，如果是二次方程，将其第$(2n+1)$，$(n=0、1、2\cdots)$数位称为“平方根位”，剩余数位称为“非平方根位”；如果是三次方程，将常数中的第$(3n+1)$，$(n=0、1、2\cdots)$数位称为“立方根位”，剩余数位称为“非立方根位”；

① 图西的主要思路是设两条圆锥曲线 l_1、l_2，首先证明在 l_1 上存在两点 A、B，其分别位于曲线 l_2 的两侧（或是内部、外部）。由于曲线 l_1 的连续性，则二者必定相交。

3. **在系数初次摆放位置的过程中需要利用“对应数位”的概念。例如数字:** 123456,**当涉及开立方运算时,其中千位数字** 3 **和个位数字** 6 **为它的两个“立方根位”;其“最后一个立方根位”指的是第二个“立方根位”,其所在数位为千位;其“所对应数位”为第二个数位,即十位;其“所对应的平方位”为第二个“平方位”,即百位,剩余同理;**

4. **在运算过程中,由数字构成的算表有三行或者四行数字。若有三行数字,则由上至下的名称分别为“上行、数行、下行”;若有四行数字,则由上至下的名称分别为“上行、数行、中行和下行”。**

图西关于第 14 **类方程:** $ax + b = x^3$ **数值解的论述如下:**

> **若要求所求数,首先在上方写出数字,将其数位按照立方根位、非立方根位、非立方根位、立方根位的顺序数出,同时在立方根位上方画出小圆圈;再将其按照平方根位、非平方根位的顺序数,直至数出最后一个立方根位所对应的平方根位。接下来写出根的数,将其数位按照平方根位、非平方根位的顺序数出,此时这些平方根位中的最后一个平方根位所对应数位,即为根的数平方根的最后一位。对于此题有三种情形:**
>
> **情形** 1: **最后一个立方根位所对应的平方根位高于根的数的最后一位。例如,数字如下:** 32767038,**将其加上** 963 **倍的根等于一倍的立方**①。**首先数出从最后一个立方根位所对应的平方根位到根的数的最后一个数位之间的数位数目,在这种情况下随后从最后一个立方根位开始数出相同数目的数位,将根的数的最后一位移至此数位,且将其缩为三分之一,如下图所示:**

° ° °	° ° °
٣٢٧٦٧٠٣٨	3 2 7 6 7 0 3 8
٣٢١	3 2 1

> **由于最后一个立方根位所对应的平方根位为第三个平方根位,它对应万位,其高于根的数的最后一个数位——百位。所以从最后一个立方根位(所对应的平方根位)数至百位,随后从最后一个立方根位开始数出相同的数位,即至万位。将根的数的三分之一的最后一位写在此位,接下来将(第一个)所求立方根,即数字** 3 **写在(上方)最后一个小圆圈所在位置。将** 3 **的立方从其下方对应数字中减去;将其乘以根的数的三分之一的所有数位数字,把每一次乘积的三倍加至数字上;将所求数的平方写在数字下方与其对应的位置上,如图所示:**

٣ ° °	3 ° °
٦٠٥٥٩٣٨	6 0 5 5 9 3 8
٣٢١	3 2 1
	9

> **将根的数的三分之一从所求数的平方中减去,并消去根的数的三分之一(所在行),剩余的部分如图所示:**

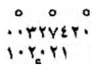
٣ ° °	3 ° °
٦٠٥٥٩٣٨	6 0 5 5 9 3 8
٨٩٦٧٩	8 9 6 7 9

> **上行移动两位,下行移动一位。随后写出第二个所求数字——**2,**将其立方从数**

① $963x + 32767038 = x^3$.

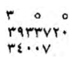
字中减去; 将其乘以第一个所求数,把乘积加到下行; 再将其乘以下行,把每一次乘积的三倍从数字中减去; 将其平方加到下行; 将其乘以第一个所求数,把得到的乘积(再次) 加至下行。上行移动两位,下行移动一位,写出最后一个所求数字——1,将其立方从数字中减去; 将其乘以第一个与第二个所求数之和,把乘积加到下行; 将其乘以下行,并把每次所得乘积的三倍从数字中减去。(此时数字减尽) 最后上行得到: 321,此即为所求。

情形 2: 根的数的最后一个平方根位高于最后一个立方根位对应的平方根位,例如: 根的数为 102021,加上数字如图 327420,等于一倍的立方①。首先按照平方根位、非平方根位的顺序数出根的数,在数字的前面添上一些数字零; 确定根的数的最高的平方根位并求出此平方根位所对应的立方根位,随后在立方根位上写出小圆圈; 将根的数的这个平方根位所对应数字移至其对应的立方根位上,根的数的剩余数位数字按照顺序依次写出,如下图所示:



$$\begin{array}{l} 0\ \mathring{0}\ 3\ 2\ \mathring{7}\ 4\ 2\ \mathring{0} \\ 1\ 0\ 2\ 0\ 2\ 1 \end{array}$$

由于根的数的最高平方根位为第三个平方根位,它对应万位,则其对应的第三个立方根位为百万位。故将根的数中的万位数字移至与第三个立方根位对齐,现要求出一个最大数字,使其平方能够从根的数中减去——得到数字 3,将其写在第三个立方根位上; 将其乘以根的数,把所得乘积加到数字上; 将其立方从数字中减去。将根的数缩为三分之一,如下图所示:



$$\begin{array}{l} 3 \\ 3\ 9\ 3\ \mathring{3}\ 7\ 2\ \mathring{0} \\ 3\ 4\ 0\ 0\ 7 \end{array}$$

随后将所求数的平方写在数字下方对应的位置; 将根的数的三分之一从其中减去,并消去根的数的三分之一所在行。上行移动两位,下行移动一位,剩余的步骤同前,直至最后。

情形 3: 若最后一个立方根位所对应的平方根位既不高于根的数的最后一个平方根位,也不低于它。将根的数的最后一个(平方根) 数位移至与最后一个立方根位对齐的位置。要求出一个最大的数字,将其与根的数的最后(部分) 数位的乘积加到数字上,使其立方能够从其下方对应的数字中减去。剩余的步骤同前,直至最后。

以上运算的原因是由于数字是一倍立方的一部分,另一部分是由根乘以根的数构成。则有根的数是(根的) 平方的一部分,另一部分乘以所求根等于数字。此时所求根的平方的一部分,以及其立方的一部分均已知,要通过它们来求所求根。

在第一种情形中,根的数的最后一个平方根位的对应数位低于最后一个立方根位的对应数位,此时数字中对应于最后一个立方根的部分即为所求立方根的最高数位数字的立方。这是由于(所求立方根) 平方的最高数位不存在于根的数中,理由是根的数的最后一个平方根位(所对应数位) 低于最后一个立方根位的对应数位,则根

---

① $102021x + 327420 = x^3$.

的数的最后一个数位低于最后一个立方根位对应数位的平方(所在数位),故所求根平方的最高数位并非在根的数中;故其必在另外一部分中,即将此部分乘以所求根等于数字,则所求根最高数位的立方位于数字中,且必定对应于最后一个立方根位。因此若我们求出了此立方根,将其写在最后一个立方根位所对应位置,此即为所求立方根的最后一位。此时其所对应的数字部分即为立方最后的部分,通过其立方计算出立方根的最后一位。随后将所求根乘以根的数的每一位数字,其中根的数可视为平方的一部分;将所得乘积加上数字,这样是为了构造立方,接下来进行立方根运算。若我们得到了所求根的最后一位,则应将其乘以根的数,将所得加到数字上去,随后将其立方从其中减去。若首先将其乘以根的数的三分之一,并将每一个乘积的三倍加到数字上,随后将其立方从数中减去,这样做的效果是相同的。接下来若我们求出了这个值之后的下一位(即所求立方根的次高数位数字),本应将其乘以根的数的每一位数字,并将所有的乘积加到数字上,随后将其乘以第一个所求数的平方并将每个乘积的三倍从其(即数字中剩余的部分)中减去。但如果我们首先在数字的下方写出第一个所求数的平方,随后从其中减去根的数的三分之一,并将随后求得的值乘以剩余的差,接下来将每一个乘积的三倍从数字中减去,它可以简化两个运算步骤①。

若将根的数的三分之一从第一个所求数的平方中减去,随后将接下来的所求数乘以剩余的差,则这个乘积的三倍相当于将其(即第二个所求数)乘以事先没有减去根的数的三分之一的(第一个所求数)平方的三倍,再减去现在所求数乘以根的数的乘积。若将所得从数字中减去,其中减数中减去的量相当于被减数中加上的量。所以事先没有将接下来的所求数乘以根的数的乘积加到数字上,其原因是已经将这个所求数与第一个所求数平方的剩余部分乘积的三倍(从数字中)减去,这就是为什么将根的数的三分之一从第一个所求数的平方中减去的原因。若求出第二个所求数,则继续按照求立方根的方法运算,将其乘以第一个所求数平方的剩余部分,随后将每个乘积的三倍(从数字中)减去。其中(减数中)减去的部分,即将其乘以根的数相当于将其加到数字上,接下来按照求立方根的方法继续运算,直至最后。([1],49~54 页)

此部分述文后面还有关于情形 2、情形 3 算法的说明,这与前面关于情形 1 算法的说明类似,此处不再展开。

4 图西关于三次方程数值解法构造原理

在图西《方程》一书中针对 11 种不同类型的方程给出了与上文类似的论述,这些冗繁的算法从表面上看既有明显的区别又有着模糊的联系,那么这些算法的本质联系是什么?图西又是如何构造出这些算法的?

通过归纳不难发现这 11 部分述文有三个共同的特点:第一、它们包括算法描述和算法说明两部分,这两部分首先强调了如何将方程中的低阶系数进行布式,进而进行初次估

---

① 此处的“简化两个运算步骤”指的是若将根的数的三分之一从第一个所求数的平方中减去后,后面两个所求根不再需要分别乘以根的数的三分之一,再各自将所得乘积的三倍加到数字上。

商; 第二、随后图西强调了从第一次估商到第二次估商之间的机械性迭代算法; 第三、图西简要提及了传统开平方法、开立方法与新算法的伴生关系。笔者认为图西是利用已有的开平方和开立方法来求解含有低阶项的方程，正是由于低阶项的引入才会导致产生低阶系数的布式、进而进行初次估商，以及如何将低阶系数融入到原有的开方程序中去这两个主要问题，下面从这两个方面进行论述。

4.1　低阶系数的布式与初次估商

在图西的书中并没有关于开平方和开立方算法单独的论述，说明这种算法早已有之，通过归纳法得出这些算法。首先看传统开方算法中的初次估商方法，例如现在要求解二次方程 $x^2 = a$，首先写出数字 a，随后从右到左按照平方根位、非平方根位、平方根位…的循环顺序将其段位，并在每一个平方根位上标出一个小圆圈，这与中算开方里“借算”的定位作用相同。有多少个“平方根位”，也就可知结果的数位数目。接下来的初次估商，就是要找出最后一个平方根位及其前面数位数字共同构成的数字中所含的最大平方数，同时将初商写在最后一个平方根位上; 开立方运算与之类似。表 1 按照《方程》的行文顺序来分析图西给出所有的低阶系数布式及初次估商算法:

表 1　图西给出的所有低阶系数布式及初次估商算法表

方程	情形	低阶系数布式	初次估商
7. $x^2 + ax = b$ (正整数 a、b 的阶数分别为 m、n，适用于 7–16，21)	1. $\left[\frac{n}{2}\right] > m$ $x^2 + 31x = 112992$	首先确定数字最后一个平方根位，本题中为第三个平方根位，其所对应数位为百位，百位到个位之间有两个数位，因此将一次项系数向左移动两位: $1\,\overset{\circ}{1}\,2\,\overset{\circ}{9}\,9\,\overset{\circ}{2}$ $3\,1$	传统估商，本题中需要在数字 11 中找出最大的平方数 9，故初商为 3. 理由: 情形 1 中决定根首位大小的在于平方项，而不是一次项;
	2. $\left[\frac{n}{2}\right] < m$ $x^2 + 2012x = 748893$	将 a 视为被除数，b 写在除数的位置上，随后通过商中的最高数位进而确定其所对应的平方根位，当利用数字除以一次项系数时不需要将一次项系数再进行移位; 若在下面类型方程中除数为二次项系数，除法运算后可能还需将二次项系数移位: $7\,\overset{\circ}{4}\,8\,\overset{\circ}{8}\,9\,\overset{\circ}{3}$ $2\,0\,1\,2$	利用除法运算。理由: 情形 2 中决定根首位大小的在于一次项，而不是平方项;
	3. $\left[\frac{n}{2}\right] = m$ 无例题	将 b 写在除数位置上;	(7–1) + (7–2) (此处符号的含义是将方程 7 中情形 1、2 的两种估根方式同时使用，下同)
8. $ax + b = x^2$	转化为方程 7 求解;		
9. $x^2 + b = ax$	方程有解的条件仅为 $\left[\frac{n}{2}\right] < m$ $x^2 + 578442 = 2123x$	将 b 写在除数位置上: $5\,\overset{\circ}{7}\,8\,\overset{\circ}{4}\,4\,\overset{\circ}{2}$ $2\,1\,2\,3$	除法运算;

续表 1

方程	情形	低阶系数布式	初次估商
10～12. $x^3+ax^2=bx$，$ax^2+bx=x^3$，$x^3+bx=ax^2$		此 3 种方程为方程 7～9 的齐次变形，降次后求解	
13. $x^3+ax=b$	1. $\left[\frac{n}{3}\right]>\left[\frac{m}{2}\right]$ $x^3+36x=33087717$	首先计算$\left(2\left[\frac{n}{3}\right]-\left[\frac{m}{2}\right]\right)$的值，从最高立方根位开始向右数出相同的数位，将 a 的最高平方根位与之对齐： $3\dot{3}08\dot{7}71\dot{7}$ 36	传统估根，在本题中即找出 33 中最大的立方数；
	2. $\left[\frac{n}{3}\right]<\left[\frac{m}{2}\right]$ $x^3+1203321x=419342202$	将$\frac{a}{3}$写在除数的位置上：（此时引入系数$\frac{1}{3}$是为了后面算法服务，下文中会分析） $41\dot{9}34\dot{2}20\dot{2}$ 401107	除法估根；求一最大整数，使其乘以$\frac{a}{3}$的首位数字，可将乘积从其上方对应数字的$\frac{1}{3}$中减去；如若不然，则将除数退一位；
	3. $\left[\frac{n}{3}\right]=\left[\frac{m}{2}\right]$ 无例题	（13-2）	（13-1）+（13-2）
14. $ax+b=x^3$	1. $\left[\frac{n}{3}\right]>\left[\frac{m}{2}\right]$ $x^3=963x+32767038$	（13-1） $3\dot{2}76\dot{7}03\dot{8}$ 321	传统估根；
	2. $\left[\frac{n}{3}\right]<\left[\frac{m}{2}\right]$ $x^3=102021+327420$	将 a 的最高平方根位与 b 中其所对应的立方根位对齐，此时注意在数字前面补零： $0\dot{0}32\dot{7}42\dot{0}$ 102021	现求某数，使其平方能够从 a 的前几位数字中减去，本题为求数字 10 中的最大平方数；
	3. $\left[\frac{n}{3}\right]=\left[\frac{m}{2}\right]$ 无例题	（14-2）	（14-1）+（14-2）
15. $x^3+ax^2=b$	1. $\left[\frac{n}{3}\right]>m$ $x^3+30x^2=36167391$	首先计算$\left(\left[\frac{n}{3}\right]-m\right)$，从最高立方根位开始向右数出相同的数位，$a$ 的最高数位与之对齐： $3\dot{6}16\dot{7}39\dot{1}$ 10	传统估根；
	2. $\left[\frac{n}{3}\right]<m$ $x^3+3000x^2=342199161$	将 a 写在除数的位置上，通过商来确定根的数位，此时 a 可能需要再次移位： $34\dot{2}19\dot{9}16\dot{1}$ 1000	除法估商；
	3. $\left[\frac{n}{3}\right]=m$ 无例题	（15-2）	（15-1）+（15-2）

续表 1

方程	情形	低阶系数布式	初次估商
16. $ax^2+b=x^3$	1. $\left[\frac{n}{3}\right]>m$ $x^3=30x^2+29984931$	(15–1) $2\,\mathring{9}\,9\,8\,\mathring{4}\,9\,3\,\mathring{1}$ $3\,0$	**传统估根;**
	2. $\left[\frac{n}{3}\right]<m$ $x^3=321x^2+927369$	**将 a 的最高数位与 b 中其对应的立方根位对其,注意补零:** $\mathring{0}\,9\,2\,\mathring{7}\,3\,6\,\mathring{9}$ $3\,1\,2$	**第一次估根即为 a 的首位数字,与**(14–2)**类似;**
	3. $\left[\frac{n}{3}\right]=m$ **无例题**	(16–2)	(16–1) +(16–2)
17. $x^3+ax^2+bx=c$ (**正整数** a、b、c **的阶数分别为** r、s、t,**适用于** 17–20)	1. $\left[\frac{t}{3}\right]>r$,**且** $\left[\frac{t}{3}\right]>\left[\frac{s}{2}\right]$ $x^3+12x^2+102x=34345395$	(13–1) +(15–1) $3\,\mathring{4}\,3\,4\,\mathring{5}\,3\,9\,\mathring{5}$ $3\,4$ 4	**传统估商;**
	2. $\left[\frac{s}{2}\right]>\left[\frac{t}{3}\right]$,**且** $\left[\frac{s}{2}\right]>r$ $x^3+6x^2+3000000x=996694407$	(13–2) +(15–1) $9\,9\,\mathring{6}\,6\,9\,\mathring{4}\,4\,0\,\mathring{7}$ 1 2	(13–2)
	3. $r>\left[\frac{t}{3}\right]$,**且** $r>\left[\frac{s}{2}\right]$ $x^3+30000x^2+30x=3124315791$	(15–2) +(13–1) $3\,1\,2\,\mathring{4}\,3\,1\,\mathring{5}\,7\,9\,\mathring{1}$ 1 1	(15–2)
18. $ax^2+bx+c=x^3$	1. $\left[\frac{t}{3}\right]>r$,**且** $\left[\frac{t}{3}\right]>\left[\frac{s}{2}\right]$ $x^3=30x^2+600x+29792331$	(14–1) +(16–1) $2\,\mathring{9}\,7\,9\,\mathring{2}\,3\,3\,\mathring{1}$ 2 1	**传统估商;**
	2. $\left[\frac{s}{2}\right]>\left[\frac{t}{3}\right]$,**且** $\left[\frac{s}{2}\right]>r$ $x^3=99x^2+70200x+340902$	(14–2) +(16–1) $\mathring{0}\,3\,4\,\mathring{0}\,9\,0\,\mathring{2}$ $7\,0\,2$ $9\,9$	(14–2)
	3. $r>\left[\frac{t}{3}\right]$,**且** $r>\left[\frac{s}{2}\right]$ $x^3=300x^2+6000x+237861$	(16–2) +(14–1) 3 $0\,2\,3\,\mathring{7}\,8\,6\,\mathring{1}$ 6 3	(16–2)
19. $x^3+ax^2=bx+c$	1. $\left[\frac{t}{3}\right]>r$,**且** $\left[\frac{t}{3}\right]>\left[\frac{s}{2}\right]$ $x^3+30x^2=60x+36148131$	(14–1) +(15–1) $3\,\mathring{6}\,1\,4\,\mathring{8}\,1\,3\,\mathring{1}$ 1 2	**传统估商;**
	2. $\left[\frac{s}{2}\right]>\left[\frac{t}{3}\right]$,**且** $\left[\frac{s}{2}\right]>r$ $x^3+3x^2=102000x+643284$	(14–2) +(15–1) $0\,\mathring{0}\,6\,4\,\mathring{3}\,2\,8\,\mathring{4}$ $1\,0\,2\,0\,0\,0$ 3	(14–2)
	3. $r>\left[\frac{t}{3}\right]$,**且** $r>\left[\frac{s}{2}\right]$ $x^3+3000x^2=300x+342102861$	(15–2) +(14–1) $3\,4\,\mathring{2}\,1\,0\,\mathring{2}\,8\,6\,\mathring{1}$ $3\,0\,0\,0$	(15–2)

续表 1

方程	情形	低阶系数布式	初次估商
20. $x^3+bx=ax^2+c$	1. $\left[\frac{t}{3}\right]>r$，且$\left[\frac{t}{3}\right]>\left[\frac{s}{2}\right]$ $x^3+300x=30x^2+30081231$	(13–1) + (16–1) 3 3 0 0 8 $\mathring{1}$ 2 3 $\mathring{1}$ 3 0 0 3 0	传统估商;
	2. $\left[\frac{s}{2}\right]>\left[\frac{t}{3}\right]$，且$\left[\frac{s}{2}\right]>r$ $x^3+300000x=30x^2+992984931$	(13–2) + (16–1) 9 9 $\mathring{2}$ 9 8 $\mathring{4}$ 9 3 $\mathring{1}$ 3 0 0 0 0 0 0 3 0	(13–2)
	3. $r>\left[\frac{t}{3}\right]$，且$r>\left[\frac{s}{2}\right]$ $x^3+300x=321x^2+96300$	(16–2) + (13–1) $\mathring{0}$ 0 9 $\mathring{6}$ 3 0 $\mathring{0}$ 3 2 1 3 0 0	(16–2)
21. $x^3+b=ax^2$	$x^3+66152322=963x^2$	将 b 写在除数的位置: 6 $\mathring{6}$ 1 5 $\mathring{2}$ 3 2 $\mathring{2}$ 9 6 3	除法运算;
方程 22 ~ 25		在有解的情况下转化为方程 15 和方程 21 求解	

图西在每一类涉及利用数值方法求解的方程中，均给出了详尽的有关低阶系数布式和初次估商的算法描述及其原理的说明。在算法描述的过程中有一些算法的细节，例如对于较大低阶系数在布式过程中是首先确定首位的位置，而不是将其从右向左移动，此外还有语言使用的统一性和严谨性均说明图西具有极强构造算法的能力; 从算法原理的说明可以看出图西具有极强的分析问题能力。另由以上列表可知，图西的上述极具规律性的算法能够处理任意含有正根的一元三次方程，并进行初次估商; 且这种规律性很容易推广至高阶一元方程的数值解法中去。下面看图西数值算法的另一个关键环节，即在初次估商后如何将低阶系数融入原有开方运算。

4.2 将低阶系数融入原有开方算法

通过全面解析原文可知，图西是在原有开平方和开立方算法的基础上，在进行完初次估商后，将方程低阶系数融入到原有机械算法中。通过归纳，在初次估商后，关于后续的机械算法，图西共提及了两种开平方算法和两种开立方算法，各算法程序如下:

第一开平方法(应用于方程 7: $x^2+ax=b$):

$$\xrightarrow{\text{①确定平方根位}} a \xrightarrow{\substack{\text{②求出第一个商}x_1\text{写在上行，}\\ \text{将}x_1{}^2\text{从 }a\text{ 中减去;}}} \begin{array}{c} x_1 \\ a-x_1{}^2 \end{array} \xrightarrow{\substack{\text{③将 }2x_1\text{ 写在下行;}\\ \text{④上下行数字均移动一位;}}} \begin{array}{c} x_1 \\ a-x_1{}^2 \\ 2x_1 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{⑤求出第二个商}x_2\text{写在上行，}\\ \text{将}x_2{}^2\text{从数中减去;}\\ \text{⑥将}x_2\text{乘以下行，把乘积从数中减去;}}} \begin{array}{c} \overline{x_1x_2} \\ a-\overline{x_1x_2}^2 \\ 2x_1 \end{array} \xrightarrow{\substack{\text{⑦将 }2x_2\text{ 加到下行;}\\ \text{⑧上下行数字均移动一位;}}} \begin{array}{c} \overline{x_1x_2} \\ a-\overline{x_1x_2}^2 \\ 2\overline{x_1x_2} \end{array}$$

⑨求出第三个商x_3写在上行，
将$x_3{}^2$从数中减去；
⑩将x_3乘以下行，把乘积从数中减去；

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \overline{x_1x_2x_3} \\ a-\overline{x_1x_2x_3}^{\,2}=0\text{[1]} \\ 2\,\overline{x_1x_2} \end{array}$$

第二开平方法（应用于方程 9：$x^2+b=ax$）：

①确定平方根位 $\longrightarrow a$

②求出第一个商x_1写在上行，
同时将x_1写在下行；
③用x_1乘以下行，将乘积从数中减去；

$$\longrightarrow \begin{array}{c} x_1 \\ a-x_1{}^2 \\ x_1 \end{array}$$

④再次将x_1加至下行；
⑤上下行数字均移动一位；

$$\longrightarrow \begin{array}{c} x_1 \\ a-x_1{}^2 \\ 2\,x_1 \end{array}$$

⑥求出第二个商x_2写在上行，
同时将其加至下行；
⑦将x_2乘以下行，把乘积从数中减去；

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \overline{x_1x_2} \\ a-\overline{x_1x_2}^{\,2} \\ 2\,x_1+x_2 \end{array}$$

⑧再次将x_2加至下行；
⑨上下行数字均移动一位；

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \overline{x_1x_2} \\ a-\overline{x_1x_2}^{\,2} \\ 2\,\overline{x_1x_2} \end{array}$$

⑩重复前面运算. $\longrightarrow$

第一开立方法（应用于方程 13～20）：

①确定立方根位 $\longrightarrow a$

②求出第一个商x_1写在上行，
将$x_1{}^3$从 a 中减去；

$$\longrightarrow \begin{array}{c} x_1 \\ a-x_1{}^3 \end{array}$$

③将$x_1{}^2$写在下行；
④上行数字移动两位，下行移一位；

$$\longrightarrow \begin{array}{c} x_1 \\ a-x_1{}^3 \\ x_1{}^2 \end{array}$$

⑤求出第二个商x_2写在上行，
将$x_2{}^3$从数中减去；
⑥将x_2乘以上行，把乘积加到下行；
⑦将x_2乘以下行，把乘积的 3 倍
从数中减去；

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \overline{x_1x_2} \\ a-\overline{x_1x_2}^{\,3} \\ x_1{}^2+x_1x_2 \end{array}$$

⑧将$x_2{}^2$写在下行；
⑨将x_2乘以上行，把乘积加到下行；
⑩上行数字移动两位，下行移一位；

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \overline{x_1x_2} \\ a-\overline{x_1x_2}^{\,3} \\ \overline{x_1x_2}^{\,2} \end{array}$$

⑪求出第三个商x_3写在上行，
将$x_3{}^3$从数中减去；
⑫将x_3乘以上行，把乘积加到下行；
⑬将x_3乘以下行，把乘积的 3 倍从数中减去.

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \overline{x_1x_2x_3} \\ a-\overline{x_1x_2x_3}^{\,3}\quad=0 \\ \overline{x_1x_2}^{\,2}+\overline{x_1x_2}\cdot x_3 \end{array}$$

第二开立方法：（应用于方程 21：$x^3+b=a\,x^2$）

①确定立方根位 $\longrightarrow a$

②求出第一个商x_1写在上行，
同时将x_1写在下行；
③将x_1乘以下行数，
将乘积写到中行；
④将x_1乘以中行数，
将乘积从数中减去；

$$\longrightarrow \begin{array}{c} x_1 \\ a-x_1{}^3 \\ x_1{}^2 \\ x_1 \end{array}$$

⑤再将x_1加至下行；
⑥将x_1乘以下行，把乘积加到中行；
⑦第三次将x_1加至下行；
⑧上下行移动两位，中行移动一位；

$$\longrightarrow \begin{array}{c} x_1 \\ a-x_1{}^3 \\ 3\,x_1{}^2 \\ 3\,x_1 \end{array}$$

---

[1] 图西书中所有方程的给出解均为 321，即第三次估商后恰好开尽，此处仅用三次迭代运算进行示意性说明，下同。

$$\xrightarrow[\text{把乘积从数中减去;}]{\substack{\text{⑨求出第二个商}x_2\text{写在上行,}\\ \text{同时将其加至下行;}\\ \text{⑩将}x_2\text{乘以下行,把乘积加到中行;}\\ \text{⑭将}x_2\text{乘以中行,}}} \begin{array}{c} \overline{x_1x_2} \\ a-\overline{x_1x_2}^3 \\ 3x_1^2+(3x_1+x_2)\cdot x_2 \\ 3x_1+x_2 \end{array} \xrightarrow{\substack{\text{⑫再将}x_2\text{加至下行;}\\ \text{⑬将}x_2\text{乘以下行,把乘积加到中行;}\\ \text{⑭第三次将}x_2\text{加至下行;}\\ \text{⑮上下行移动两位,中行移动一位;}}}$$

$$\begin{array}{c} \overline{x_1x_2} \\ a-\overline{x_1x_2}^3 \\ 3\,\overline{x_1x_2}^2 \\ 3\,\overline{x_1x_2} \end{array} \xrightarrow{\text{⑯重复前面运算.}}$$

下文中为了便于表述,将“第一开平方法”和“第一开立方法”统称为“第一开方法”,类似地有“第二开方法”。很明显“第一开方法”是直接利用平方和、立方和公式展开后的系数构造减根变换方程;且由于系数的特殊性,算法程序较“第二开方法”简便许多,但是其缺点是这种算法无法推广至高阶开方运算。“第二开方法”是利用“随乘随加”的机械算法构造减根变换方程系数,且能推广至任意正整数阶开方运算。笔者认为由于图西熟悉海亚姆的著作,故海亚姆可能已经熟识了这些算法。此处的“第一开方法”可能源于其所认为的“印度”数学知识;“第二开方法”可能就是海亚姆提到他所创的可以推广至高阶开方运算的算法。另外据拉舍德考证在图西之前的阿拉伯数学家萨马瓦尔也曾给出过相同的以“随乘随加”为核心的高次开方算法([4],92～99 页)。据钱宝琮先生考证,中算高次开方算法中处于核心地位的“增乘”开方法最早见于 11 世纪中宋代贾宪所著《黄帝九章算法细草》,此书原本已经遗失,但其部分内容载于南宋刘辉《详解九章算法》之后附录的《九章算法纂类》(1261 年)中,开平方法录“贾宪立成释锁平方法”和“增乘开平方法”;开立方法录“贾宪立成释锁立方法”和“增乘开立方法”[12],就二者间的关系还需要进一步研究。

如前所述,“第一开方法”要简便于“第二开方法”,图西此处利用基于“第二开平方法”改造的算法求解第 9 类方程:$x^2+b=ax$;以及利用基于“第二开立方法”改造的算法求解第 21 类方程:$x^3+b=ax^2$,这是为了便于估算初商,就此在下文中还要讨论。图西大范围的算法改造是将“第一开立方法”应用于方程 13～20,这 8 种算法程序如表 2 所示①:

表 2 图西将“第一开立方法”应用于方程 13～20 算法表

方程	将低阶系数融入第二开立方法的原有算法程序
13. $x^3+ax=b$	①→将$\frac{a}{3}$写在下行→ ②→将x_1乘以下行数字$\frac{a}{3}$,把乘积的 3 倍从数中减去→ ③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬

① 此表中右侧一列的算法程序按照箭头的顺序进行,序号分别对应于上文中的“第一开立方法”,具体内容省略;中间穿插的文字部分为不同类型方程算法所特有,它们穿插在原有的“第一开立方法”程序中,目的是将方程的低阶系数融入原有的算法程序。

续表 2

方程	将低阶系数融入第二开立方法的原有算法程序
14. $ax+b=x^3$	①→将$\frac{a}{3}$写在下行→ ②→将x_1乘以下行数字$\frac{a}{3}$，把乘积的 3 倍加至数字→ ③→在下行中求出$x_1{}^2-\frac{a}{3}$，消去原$\frac{a}{3}$所在行→ ④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬
15. $x^3+ax^2=b$ （算式为四行，最下行始终为$\frac{a}{3}$，开立方运算中的下行变为此处的倒数第二行，即“中行”）	①→将$\frac{a}{3}$写在下行→ ②→将x_1乘以下行数字$\frac{a}{3}$，把乘积写在中行； 再将x_1乘以中行数字，把乘积的 3 倍，即$x_1{}^2\cdot a$从数中减去→ ③→将x_1再次乘以下行数字$\frac{a}{3}$，把乘积加至中行→ ④⑤⑥→将x_2乘以下行数字$\frac{a}{3}$，把乘积加至中行；→ ⑦⑧⑨→将x_2再次乘以下行数字$\frac{a}{3}$，把乘积加至中行；→ ⑩⑪⑫→将x_3乘以下行数字$\frac{a}{3}$，把乘积加至中行；→⑬
16. $ax^2+b=x^3$ （尽管与方程 15 相似，但是在第一次估商后图西将下行$\frac{a}{3}$从上行x_1中减去并消去下行；每次新产生的估商x_{i+1}写在原有上行（$\overline{x_1\cdots x_i}-\frac{a}{3}$）的上方，直至每次移位前，再将$x_{i+1}$融入其下行（$\overline{x_1\cdots x_{i+1}}-\frac{a}{3}$）中。故算式仍为四行，但是与方程 15 的四行算式相比意义大为不同）	①→将 a 写在下行→ ②→将x_1乘以下行数字 a，把乘积写在中行； 再将x_1乘以中行数字，把乘积$x_1{}^2\cdot a$加至数字并消去中行→ ③→将下行 a 化为$\frac{a}{3}$；将x_1乘以下行， 把乘积的 2 倍，即$2\cdot\frac{a}{3}\cdot x_1$从中行$x_1{}^2$中减去； 将下行的$\frac{a}{3}$从上行$x_1$中减去并消去下行；→ ④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬→最后将上行数字加上$\frac{a}{3}$即为所求
17. $x^3+ax^2+bx=c$	图西指出方程 17 是由方程 13、15 复合而成，它具备了前面两种方程的所有特性，所以其求解算法也是方程 13、15 算法的复合，这点与前面初次估商的相应复合算法完全相同。第 17～20 类方程算法程序此处不再展开
18. $ax^2+bx+c=x^3$	方程 14、16 算法复合
19. $x^3+ax^2=bx+c$	方程 14、15 算法复合
20. $x^3+bx=ax^2+c$	方程 13、16 算法复合

同前面关于低阶系数布式和初次估商的内容类似，图西对于每一种情形均给出了详尽的后续算法论述及其原理说明，这些繁琐的论述说明图西可能就是这些算法的首创者。但上述算法没有做到严格的“统一”，从上面表格内容可知，例如图西在处理类似方程 15 和 16 的二次项系数时就采用了不同的算法，导致后面方程 17～20 也出现了算法的不统

一，如果全部统一为方程 16 的算法会更为简便。这说明图西可能仅是为了将几个具有代表性的方程进行示意性说明，而没有将该算法进行大量的实际应用。可能的原因是由于在上述方程的几何解法中，由于不同种类的二次曲线相交体现了解法的多样性，故图西或许也无意于寻找一种高度“统一”的数值解法。接下来看图西对于方程无理根的认识。

4.3 图西对无理根的认识

如果方程源于实际问题，则很难保证该方程会得出整数解，这便涉及对方程无理根的认识。正是由于解决实际问题的需要，中算家们很早就认识到了无理根并且给出了一系列近似算法。与之不同的是早在海亚姆的书中，他仅承认方程的正整数根，明确否定了方程无理根的存在。例如，他在对第 7 类方程的论述中指出:

> 第一种: 一倍平方加上其根的十倍等于数字三十九。
>
> 将根的数的一半自乘，所得乘积加上数字，在所得结果的平方根中减去根的数字的一半，剩余的差即为平方的根。用数字方式需要满足两个条件: 第一个是根的数字为偶数，则其存在一半; 第二个是根的一半的平方与数字之和为平方数，否则本题无法用数字方式求解。([10]，137 页)

可能是受此影响，图西在其著作中同样没有提及无理根。但是为了保证方程有正整数根，他事先预设了具体的正整数作为方程的根，随后反推出各种不同形式的方程，故全书所给 29 个方程无一例外均含有 321 这个正整数根. 有趣的是图西书中第 21 ~25 类方程，当海亚姆利用圆锥曲线相交对它们求解的过程中很显然这些方程可能会有两个解，图西的数值分析也证明了这点。但是由于方程数值解法自身的缺陷，使得图西书中相关的 6 个方程，均仅给出了正整数根 321。对于剩余的 6 个无理根，图西虽承认它们的存在，但没有进一步探究，如下所示:

类型: ㉑$x^3+b=ax^2$

$$\begin{cases} x^3+14837904=465x^2 \\ \text{构造第 15 类辅助方程:}\ X^3+465X^2=57596 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1\approx 298.73\ (\text{图西没有给出}) \\ x_2=X+310=321 \end{cases};$$

$$x^3+66152322=963x^2 \rightarrow \begin{cases} x_1=321 \\ x_2\approx 876.99\ (\text{图西没有给出}) \end{cases};$$

类型: ㉒$x^3+b=ax$

$$\begin{cases} x^3+13957722=146523x \\ \text{构造第 15 类辅助方程:}\ X^3+663X^2=7630000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1\approx 102.64\ (\text{图西没有给出}) \\ x_2=321 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^3+137606922=531723x \\ \text{构造第 21 类辅助方程:}\ X^3+11630000=1263X^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=321 \\ x_2\approx 513.62\ (\text{图西没有给出}) \end{cases};$$

类型㉓$x^3+ax^2+c=bx$

$$\begin{cases} x^3+60x^2+57127086=300267x \\ \text{构造第 15 类辅助方程:}\ X^3+951X^2=561600 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1\approx 272.38\ (\text{图西没有给出}) \\ x_2=321 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^3+60x^2+88651854=398475x \\ \text{构造第 21 类辅助方程:}\ X^3+(C_0-C)=1095X^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=321 \\ x_2\approx 368.49\ (\text{图西没有给出}) \end{cases}。$$

当东西方两种数学传统在阿拉伯高次方程求解问题上相遇时，为图西提供了一个认识几何量与实数量对应关系认识的机会，又或是将传统数域扩充的机会，遗憾的是他并没有抓住。

5　图西与秦九韶相关算法的比较研究

图西所给高次方程数值解算法在中算里，被称为“带从开方”问题，它最早可以追溯到《九章算术·勾股章》，经历代中算家如贾宪、刘益等人的发展，到宋秦九韶、李冶、朱世杰时到顶峰，钱宝琮先生曾撰文就此问题进行过深入研究，他指出：

> 南宋秦九韶撰《数书九章》十八卷（1247 年自序），集合八十一个应用问题的解法。其中二十一个问题的二十六个开方式是增乘开方法求出所求的正根的。（[12]，48 页）

巧合的是，作为与图西同时代的秦九韶在求解相似问题时的算法，与前者表现出相似性，同时由于史料的相对完整性和集中性，下面笔者将二者进行简要的比较。

首先笔者从图西和秦九韶的著作中，各选取一道形式上接近的题目来进行初步直观的比对。由上文可知，图西对第 21 类方程算法的改造是基于“第二开立方法”进行的，而这种算法的核心同样是“随乘随加”，其与中算“增乘开方法”相同。图西所给例题为：$x^3 + 66152322 = 963x^2$。书中首先通过系数之间的关系来判断方程必有正根，即此时方程$x^3 + c = ax^2$满足 $c < c_0 = \frac{4}{27}a^3$；随后利用数字除以二次项系数，通过商的数位来判定根的位数。本题中商为万位数字，共含有 3 个平方根位。对于数字，从个位开始数至第 3 个立方根位，即为所求第一个立方根位，如下所示：

$$\begin{array}{cccccccc} 6 & \overset{\circ}{6} & 1 & 5 & \overset{\circ}{2} & 3 & 2 & \overset{\circ}{2} \\ & 9 & 6 & 3 & & & & \end{array}$$

接下来进行第一次估商，即求某一最大数字，在本题中应满足：将其从二次项系数的最后一位数字 9 中减去（理由是布式后，其恰好对应最后一个立方根位）；将其乘以前面得到的差；把所得乘积写在中行；随后再次将其乘以中行；可以将得到的乘积从对应的数字部分中减去，图西得到的首位估商为 3，随后通过与估商思路一致的“随乘随加”的机械算法得到方程的根为 321。如下所示：

①写出初次估商$x_1 = 3$；
②将其从下行二次项系数 963 的最后一位数字中减去；
③将x_1乘以下行数字，乘积写在中行；
→
3
66152322
1989
663

④将x_1乘以中行数字，
随后把所得乘积从数中减去；
→
3
6482322
1989
663

⑤再次将x_1从下行最后一位数字 6 中减去；
⑥将x_1乘以下行，把乘积加到中行；
⑦第三次将x_1从下行最后一位数字 3 中减去；
⑧上下行移动两位，中行移动一位；
→
3
6482322
3078
63

⑨写出第二次估商$x_2 = 2$；
⑩将其从下行最后一位数字 6 中减去；
⑪将x_2乘以下行数字，乘积加至中行；
⑫将x_2乘以中行数字，
随后把所得乘积从数中减去；
→
32
309122
30866
43

⑬再次将x_2从下行 43 的最后一位数字 4 中减去;
⑭将x_2乘以下行,把乘积加到中行;
⑮第三次将x_2从下行 23 的最后一位数字 2 中减去;
⑯上下行移动两位,中行移动一位;
→

32
309122
30912
3

⑰第三次估商得到,$x_3=1$;
⑱重复前面机械算法,恰好除尽,
得到所求方根 $x=321$。
→

由以上算法容易归纳出"第二开立方法"。接下来看秦九韶的相关算法,《数书九章》在题目形式上是以解决实际问题为主的题集,这点与图西《方程》一书迥异。《数书九章》共有二十多个开方问题,且载有增乘开方法的演算过程。下面以其田域类问题中第五卷例题一"尖田求积"为例进行说明,通过原题列出方程,用现代符号表示为: $-x^4+763200x^2-40642560000=0 \rightarrow x=840$。秦九韶在术文后的草文中,给出了详尽的演算程序,并附有解说演算步骤的筹算图示——"正负开三乘方图",共 21 个。为了便于比较,笔者将其缩减为 5 个,且原图中的筹码用阿拉伯数字表示[13]:

用筹式表示方程
→

-40642560000	实
0	虚方
+763200	从上廉
0	虚下廉
-1	益隅

上廉超一位,益隅超三位,商数进一位;
上廉再超一位,益隅再超三位,商数再进一位;
上商八百为定;
→

8	商
-40642560000	实
0	虚方
+763200	从上廉
0	虚下廉
-1	益隅

以商生隅,入益下廉;
以商生下廉,消从上廉;
以商生上廉,入方;
以商生方,得正积,乃与实相消;
以负实消正积,其积乃有余,为正实,谓之'换骨';
→

8	商
+38205440000	正实
+98560000	方
+123200	上廉
-800	负下廉
-1	益隅

以商生隅入下廉——一变。
以商生下廉,入上廉内,相消,以正负上廉相消;
以商生上廉,入方内相消,以正负方相消;
以商生隅入下廉——二变。
以商生下廉,入上廉;
以商生隅入下廉——三变。
方一退,上廉二退,下廉三退,隅四退。
商续置——四变。
→

84	商
+38205440000	正实
-826880000	负方
-3076800	负上廉
-3200	负下廉
-1	益隅

以方约实，续商置四十，生隅入下廉内；
以商生下廉入上廉内；
以商生上廉入商内；
以续商四十命方法，除实，适尽。
所得商数八百四十步，为田积。
$\longrightarrow$

840	商
	实空
－955136000	负方
－3206400	负上廉
－3240	负下廉
－1	益隅

接下来结合上文，笔者从问题来源、算法本质等多个方面将二者各自数值算法进行相对全面的比较，如表 3 所示：

表 3　图西与秦九韶数值算法比较表

	萨拉夫·丁·图西	秦九韶
问题来源	针对海亚姆书中三次方程 25 种不同类型分别给出算法，这些抽象数学问题的解决是典型由于内因促进数学文明发展的案例	方程数值解问题在中算被称为解“带从开方”问题，秦九韶为集大成者，这些算法均是解决实际问题。秦九韶《数书九章》中共 81 题，其中 80 题源于数学的实际应用；秦九韶的数值解法已经能解任意正整数阶方程
算法本质	图西的算法本质是首先求解方程根的首位数字，随后利用机械性算法构造减根变换方程，继续求解；在部分题目中，图西利用“随乘随加”的算法与中算“增乘开方法”相同构造新算法	秦九韶在算法本质上延续了早期的中算传统，且与图西相同
对方程有无解条件的判断	图西在海亚姆所给利用圆锥曲线求解的基础上对三次方程 25 种不同类型是否可解，以及具体的可解条件进行了详尽分析	由于缺少相应的数学传统和数学工具，直至宋元时期历代中算家均没有对高次方程可解条件进行分析
初次估商	图西在书中共 29 处针对低阶系数的布式以及初次估商，给出了详尽的算法和原理说明，这些规律性极强的算法不仅可以解决所有的三次方程问题，理论上还可以推广至高阶方程	由于中算家们处理的方程源于实际问题，不可能像阿拉伯学者一样涉及所有不同类型方程，所以秦九韶未给出所有不同类型方程低阶系数布式和初次估商算法，且秦氏在所给算法中从未给出算法理由
迭代算法	由于早期阿拉伯代数学方程分类思想的影响，使得后世的学者总是试图对每一种类型方程均给出各自的几何和数值解法，这或许使得图西不会寻求一种统一的迭代算法；尽管图西已经掌握了与中算相同的“增乘”开高次方法，但或许由于寻求几何解法以及对方程有解条件的分析等传统禁锢了阿拉伯学者将其推广至高阶方程的步伐	《九章算术·方程章》的“遍乘直除”使得中算家们较早地认识了负数；同历代中算家相比，对于解“带从开方”问题，秦九韶最大的贡献在于提出了“正负开方术”，把以贾宪创造的“增乘”开方法为主导的求高次方程正根的方法发展到十分完备的程度[14]
对无理根认识	尽管图西已经走到了认识方程无理根的边缘，但是与他的老师海亚姆相同，在希腊数学传统的影响下使得他仍没有承认方程的无理根。从现有史料看，至迟到 15 世纪初，阿拉伯数学家阿尔·卡西给出了与中算家们类似的无理根算法，使得他在推算弦表中的 $\sin 1^{\circ}$ 值时，已能将其精确推算至 60^{-8} 数位[15]	同样是源于实际问题，使得中算家们很早就认识到了无理根，早在《九章算术·少广章》中就有关于不尽方根的论述，秦九韶在这种传统的影响下，理论上利用上述迭代算法可以求得任意精度的无理根

由上可知图西与秦九韶在进行高次方程数值解运算时，采用相似的数字布式算法，其

中二者均可以基于“随乘随加”的“增乘开方”法构造出自洽的算法；但是由于各自数学传统的影响，使得二者在问题来源、对于方程有无解的判断等方面均表现出较大差异。该研究的意义在于，一方面可以从多角度、相互的、重新审视各自文明中已有的数学成就；另一方面若沿着各自相关数学传统探究下去，可以为日后进行两种文明间相关算法的全面比较起到铺垫作用。

6 结 语

13 世纪之前的阿拉伯代数学一直以方程化简和求解为主要内容，海亚姆和图西是方程求解发展成熟阶段的代表人物。海亚姆在早期阿拉伯代数学传统的影响下将三次方程分为 25 类，并利用圆锥曲线相交的方法对所有类型方程的解进行希腊式的定性描述。此外海亚姆还明确指出“印度算数”中的开方算法可以求解部分方程，但是其不属于代数学范畴，且不承认方程的无理根。萨拉夫·丁·图西全面继承并且发展了海亚姆的方程理论，他首先对 25 类方程的可解条件进行分析，随后对于可解方程均给出了各自的几何解和数值解。在几何解方面，图西照搬了海亚姆的方法，但是在证明的过程中对于根的存在性进行了严格化证明；至于数值解，其算法的来源与构造思想并非可以直观看出，需要进行深入剖析。尽管拉舍德给出了图西《方程》一书权威的法阿对照译本并进行了研究，但笔者认为这些研究主要有两点不足。一方面，拉舍德在 1974 年的论文[2]中将图西原始文献中分散的数表组合在一张数表中并进行分析，这些内容进而体现在其 1984、1994 年的论著[3,4]中，这种做法有些过度诠释；另一方面，尽管拉舍德在 1986 年的对照译本[1]中针对图西方程数值解进行了大量的数理分析，但其本质是利用现代数学思想和方法对算法的正确性进行证明。图西《方程》一书包含大量的、重复性的、相对复杂且成熟的算法描述，加之有明显的早期数学影响痕迹，笔者认为其中可能蕴涵了算法思想的来源以及构造原理等更为深层面的内容，就图西三次方程数值解问题还有较大研究空间。

在上文中笔者基于当时已有的相关算法的特点探寻所有方程算法之间本质的关系，进而分析该算法演化的过程和构造的思想。得出图西最大的贡献在于他基于已有的“印度算数”中开方算法——这些开方算法很可能为海亚姆所知——针对每一类方程有规律地构造出了系列算法，这些新的算法巧妙地处理了由于方程低阶系数的引入而产生的初次估商，以及如何将低阶系数融入其后续机械算法等方面的问题。遗憾的是，当东西方两种算法传统在高次方程求解问题上相遇时，图西已经走到了认识方程无理根的边缘，但他却没有继续探讨下去。作为同时代人的图西和秦九韶在高次方程数值解问题上采用了类似的算法，从而分别将各自数学文明中此类问题解法推到了顶点。尽管如此，由于各自数学传统的不同，二者又有明显的区别。

参 考 文 献

1 Sharaf al-Dīn Al-Ṭūsī. Rashed R. (ed & trans.) . *Oeuvres mathématiques: Algèbre et géométrie au XIIe siècle* [M] . 2 Vols. Paris: Les Belles Lettres, 1986.

2 Rashed R. Résolution des équations numériques et algèbre: Saraf-al-Dīn al-Tūsī, Viète [J]. *Archive for History of Exact Sciences*, 1974, 12(3): 244～290.

3 Rashed R. *Entre Arithmétique et Algèbre: Recherches sur l'Histoire des Mathématiques Arabes* [M]. Paris: Les Belles Lettres, 1984.

4 Rashed R. Translated by Armstrong A F. *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra* [M]. Kluwer Academic Publishers, 1994.

5 Chemla K. Similarities between Chinese and Arabic Mathematical Writings: (I) Root Extraction [J]. *Arabic Science and Philosophy*, 1994, 4: 207～266.

6 Chemla K. Essay Review: The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook [J]. *Historia Mathematica*, 2012, 39: 324～334.

7 包芳勋,孙庆华. 阿拉伯与中国代数方程数值解法的比较研究——阿尔·徒思与宋元数学家比较的个案分析 [J]. 自然科学史研究,1999,18(3): 198.

8 甘向阳. 中外若干算法的比较研究 [D]. 西安: 西北大学博士论文. 2004. 91～96.

9 Al-Samaw'al. Ahmd S, Rashed R(eds.). *Al-Bahir en algebra* [M]. Damascus: Imp. de l'Université de Damas, 1972.

10 Rashed R, Vahabzaded B. *Al-Khayyam Mathematicien* [M]. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1999. 125～129.

11 Youschkevitch A, Rosenfeld B. *al-Khayyāmī* [C] //Dictionary of Scientific Biography (Volume 7). New York: Charles Scribner's Sons, 1973. 323～334.

12 钱宝琮. 增乘开方发的历史发展 [C] //钱宝琮. 宋元数学史论文集. 北京: 科学出版社,1966. 36～59.

13 陈传信等.《数书九章》今译及研究 [M]. 贵阳: 贵州教育出版社, 1992. 159～162.

14 郭书春. 中国科学技术史·数学卷 [M]. 北京: 科学出版社, 2010. 363.

15 Rosenfeld B, Hogendijk J P. A mathematical Treatise Written in the Samarqand Observatory of Ulugh Beg [J]. *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften*, 2002/2003, 15: 25～65.

A Study on Sharaf al-Dīn al-Tūsī's Numerical Solution of Cubic Equations

GUO Yuanyuan

(*Institute for the History of Natural Sciences*, *CAS*, *Beijing* 100190, *China*)

Abstract This article analyzes the numerical solutions of cubic equations based on comprehensive interpretations of "*Equations*" (1209) by Sharaf al-Dīn al-Tūsī (1135～1213). The results show that the algorithms were constructed from existing methods of extracting roots. The article also compares the algorithms by al-Tūsī and Qin Jiushao. Results indicate that the cores of the two algorithms were the same, though they were significantly different due to differences in the mathematical traditions. The present study is significant in understanding the numerical solutions of the cubic equations by al-Tūsī. It also contributes to investigations of the features and traditions of such mathematical algorithms in China and Arabic countries.

Keywords Sharaf al-Dīn al-Tūsī, Omar Khayyam, Qin Jiushao, numerical solution of cubic equations