

# 关于中国古代体积与容积 计量方式的新发现

杨涤非 邹大海

(中国科学院自然科学史研究所 北京 100190)

**摘要** 中国古代计量体积与容积时习惯于采用长度单位,并用长度来描述其大小。王荣彬、李继闵曾揭示过这种方式的一种情形。本文发现兵学文献中存在一种尚不为学界所知的新情形:假定把一个体积或容积化为一个正四棱柱体,以边长一尺的正方形为底面,以高的长度作为该体积或容积的度量值。这一方式能避免计算中数量的混淆,易于广大下层军官学习和掌握,更能适应军事活动对时效性的迫切需要。这一发现对我们了解中国古代数学、度量衡制度,解读古代历史文献都有重要的意义。

**关键词** 体积与容积计量方式 古代土方 军事工程 文献解读

**中图分类号** N092:O119

**文献标识码** A **文章编号** 1673-1441(2014)03-0269-12

## 1 问题的发现

现代计算体积或容积时,一般使用长度单位的立方作为度量体积或容积的单位。然而在中国古代,情况却并非如此,文献中经常直接使用长度单位的名称来表示体积和容积,同样是若干丈若干尺若干寸,既可以表示长度又可以表示面积或体积。对于这种现象,很多前辈数学家都曾针对具体问题做出正确的解释,而王荣彬和李继闵(以下简称“王、李”)对此曾做过专门考察<sup>[1]</sup>,并明确提出一个观点:

古人在测量体积时,亦先假定将立体化为底面边长为单位长度之正方形的直棱柱,用此柱体高的测度表示体积的大小。这种测度体积方法的道理正是我们今天用试管的刻度读出容积之法的原理所在。( [1],162页)

并指出:

虽然我国先民仅用一维量而广施于二维及三维量的测度,但他们对三者之间的区别是清晰的。( [1],162页)

---

收稿日期:2014-04-08; 修回日期:2014-07-10

作者简介:杨涤非,1977年生,江苏无锡人,中国科学院自然科学史研究所博士生;邹大海,1965年生,湖南新化人,中国科学院自然科学史研究所研究员。

也就是说,古人使用与长度相同的方式描述面积以及体积的数量;而用长度表示的数量,是长度、面积、还是体积,古人会根据具体情况来判定。这为现代人理解某些古代文献提供了方向。但两位先生揭示的古代计量方式,并不适用于中国古代的体积、容积计量的全部。

现在,我们新发现了另外一种不为人所注意的情形。这一发现基于对与军事有关的5项古代文献的分析。这些文献记录筑城和凿壕的施工问题,文字大同小异,已有学者利用了一部分。他们有的不太在意而照录有问题的原文,有的则由于不懂中国古代的体积、容积的计量方式而做了不正确的校改和解读。我们揭示的这种关于土方的计量方式,既可以解决相关原始文献中的讹误,也可以扩展和加深我们对古代计量制度以及相关的数学知识的认识。

## 1.1 涉及体积和人工计算方法的5项史料

### 1.1.1 《通典》卷152《兵五·守拒法附》

凡筑城,下阔与高倍,上阔与下倍。城高五丈,下阔二丈五尺,上阔一丈二尺五寸。高下狭阔,以此为准。料功,上阔加下阔,得三丈七尺五寸,半之,得一丈八尺七寸五分;以高五丈乘之,一尺之城,积数得九十三丈七尺五寸。每一功,日筑土二尺,计功约四十七人。一步五尺之城,计役二百三十五人;一百步,计功二万三千五百人;三百步,计功七万五千人。率一里,则十里可知。其出土负簣,并计之(大)[于]<sup>①</sup>功之内。<sup>[2]</sup>

城壕,面阔二丈,深一丈,底阔一丈,以面阔加底[阔],积数[三](大)[丈]<sup>②</sup>,半之,得数一丈五尺,以深一丈乘之,凿壕一尺,得数一十五丈。每一人功,日出三丈,计功五人;一步五尺,计功二十五人;十步,计功二百五十人;百步,计功二千五百人;一里,计功七(万)[千]<sup>③</sup>五百人。以此为率,则百里可知。( [2] 3895 页)

### 1.1.2 《神机制敌太白阴经》卷5《预备·筑城篇第四十三》

古今度城之法者,下阔与高倍,上阔与下倍,城高五丈,下阔二丈五尺,上阔一丈二尺五寸,高下阔狭,以此为准。料功,以下阔加上阔,得三丈七尺五寸,半之,得一丈八尺七寸五分,以高五丈乘之,一丈之城,积数得九十三丈七尺五寸。每一工,日筑二丈,计工四十六人,日筑城一丈,余七尺五寸,一步计役二百七十八人,土余五丈;一百

- ① “大”字原底本作“夫”,校勘记谓系“据北宋本、傅校本、明抄本、明刻本、吴王本改”( [2] 3905 页)。但《通典》“并计之夫功之内”句《虎铃经》作“并计之于工内矣”,再结合上下文,则“夫”字为“于”之误的可能性大得多。凡被校文字外加圆括号,校正后的文字外加方括号。五项史料中的讹误,凡涉及本文主题的论证者,暂仍其旧,以便后面做分析、论证。其他的随文校正。
- ② “以面阔加底阔,积数三丈,半之”原文作“以面阔加底积数大半之”。“大半”是三分之二,这里显然是要折半,于数不合。《太白阴经》相似段落中的相应文字作“以面阔加底阔,积数三丈,半之”,可知“底”字后当补“阔”字,“数”字后脱“三”字,“大”为“丈”字之误。
- ③ 原文作“万”,那么“一里,计功七万五千人”相当于一里等于2820步,这显然不可能。一里古代通常有300步和360步两种标准,此处当为300步,“万”字当校正为“千”。其作“七万五千人”者,可能是涉上段“七万五千人”而误。

步,计工二万七千八百二十人,余一丈土;一里,计工一十万一百九十人,余一丈土<sup>①</sup>。率一里,则十里可知,其出土负簣,并计二丈土,其羊马城于濠内,筑高八尺,上至女墙,计工准上。( [3] 543-544 页)

又同书同卷之《预备·凿濠篇第四十四》:

经曰:濠面阔二丈,深一丈,底阔一丈,以面阔加底阔,积数三丈,半之,得数一丈五尺,以深一丈乘之,凿濠一尺,得数一十五丈。每一工,日出土三丈。一尺,计工五人;一步,计工三十人;一里,计工一万八(千) [百]人<sup>②</sup>。一里为率,则百里可知。( [3] 544-545 页)

### 1.1.3 《虎铃经》卷6《筑城第五十六》

凡筑城,下阔与高倍,上阔与下倍。城高五丈,下阔二丈五尺,上阔一丈二尺五寸。高下阔狭,以此为准。料工,上阔(下加) [加下]阔<sup>③</sup>,得三丈七尺五寸;半之,得一丈八尺七寸五分,以高五丈乘之,一尺之城,积数得九十三丈七尺五寸。每一工,(旧) [日]筑土二丈<sup>④</sup>,计工约四十七人。一步五尺之城,计役二百三十五人;百步之城,计工二万三千五百人;三百六十步,计工八万四千六百人。率一 [里]<sup>⑤</sup>,则十里可知也。其出土负簣,并计之于工内矣。<sup>[4]</sup>

又同书同卷之《城壕第五十七》:

凿壕之法,面阔二丈,深一丈,底阔一丈。以面阔二丈加底阔一丈,积数 [三] (大) [丈]<sup>⑥</sup>,半(得)<sup>⑦</sup>之,得数一丈五尺。以深一丈乘之,凿壕一丈,得数一十五丈。每工,日出土三丈,计工五人。一步,五尺,计工二十五人;十步,计工二百五十人;百步,计工二千五百人;三百六十步,计工九千人。率一里,则百里可知也。( [4], 117—118 页)

### 1.1.4 《武备志》卷110《军资乘·守一·城制》

《太白阴经》曰:……夫城下阔与高倍,上阔与下倍。城高五丈,阔二丈五尺,上阔一丈二尺五寸。高下阔狭,以此为准。料工,以下阔加上阔,得三丈七尺五寸;半之,得一丈八尺七寸五分;以高五丈乘之,一尺之城,积数得九十二丈七尺五寸。每一

① “日筑城一丈,余七尺五寸,一步计役二百七十八人,土余五丈;一百步,计工二万七千八百二十人,余一丈土;一里,计工一十万一百九十人,余一丈土”中数字多有齟齬之处,其中数字上的差异,由除法的余数之误造成,不是数量级上的出入,并不影响本文的结论。这个问题比较复杂,我们将另文分析。

② 原文作“八千”,为“八百”之误,依算理和《武备志》所引及《防守集成》校正。

③ “加下”,原文误倒作“下加”,参考上文引《通典》“守拒法附”条乙正。

④ “日筑土二丈”中的“日”原文误作“旧”,今据《太白阴经》、《通典》等中相应文字校正。

⑤ 原文脱“里”字,据文意及《通典》、《太白阴经》校补。

⑥ 原文作“积数大”,参照《太白阴经》校正为“积数三丈”。参考上文引《通典》“守拒法附”条时对相应原文所加的注释。

⑦ 原文涉下“得数”而衍“得”字,今删之。

功,日筑土二丈,计功四十六人,日筑城一丈七尺五寸<sup>①</sup>。一步计役功二百七十八人,余土五尺。一百步,计功二万七千八百二十五人,余土一丈。一里,计功十万一百七十人,余土一丈。土率一里,则十里可知。其(中二) [出土]<sup>②</sup>负簣,并计二丈土之功。其羊马城下壕内筑高八尺,上置女墙,记功准上。有鑿壕法,壕面阔二丈,深一丈,底阔一丈,以面阔加底阔,积数三丈,半之,得数一丈五(寸) [尺]<sup>③</sup>。以深一丈乘之,鑿壕一尺,得数一十五丈。每一功,日出土三丈;一尺,计功(立) [五]<sup>④</sup>人;一步,计功三十人;一里,计功一万八百人。一里为率,则百里可知也。<sup>[5]</sup>

### 1.1.5 《防守集成》卷1《城制》

凡大城除堞,(身城) [城身]<sup>⑤</sup>必高四丈,或五丈,或三丈五尺。面阔必二丈,或二丈五尺,或一丈七尺五寸。底阔必四丈,或五丈,或(一) [三]<sup>⑥</sup>丈五尺。

次城除堞,城身……

小城除(城堞) [堞,城]身必高二丈<sup>⑦</sup>。……

……

大凡筑城料工之法,以下阔加上阔,得三丈七尺五寸,半之,得一丈八尺七寸五分。以高五丈<sup>⑧</sup>乘之,一尺之城,积数得九十三丈七尺五寸。每一功,日筑土二丈,计功四十六人,余土一丈七尺五寸。一弓计役功二百八十一人,余土五尺;一百弓,计功二万八千一百二十五人。一里三百六十步,计功六万七千五百人<sup>⑨</sup>。土率一里,则十里可知。其(山二) [出土]<sup>⑩</sup>负簣,并计二丈土之功。<sup>[6]</sup>

### 又同书同卷之《凿壕料工法》:

凡壕,面阔二丈,深一丈,底阔一丈。以面阔加底阔,积数得三丈,半之,得数一丈五尺。以深一丈乘之,凿壕一尺,得数一十五丈。每一功,日出土三丈。一尺,计功(立) [五]人<sup>⑪</sup>;一步,计功三十人;一里,计功一万八百人。一里为率,则百里可知也。( [6] 35 页)

① “积数得九十二丈七尺五寸。每一功,日筑土二丈,计功四十六人,日筑城一丈七尺五寸”中,“积数得九十二丈七尺五寸”有误,按照实际计算: $(25 + 12.5) \div 2 \times 50 \times 0.1$ (丈) = 93.75(丈),知其为“九十三丈七尺五寸”之误,亦与现在流传的《太白阴经》不符。后面的“日筑城一丈七尺五寸”不通,如果校正为“日筑城一尺,余七尺五寸”则与这个92.75丈的错误数据相合,亦与后面“一步,计役功二百七十八人,余土五尺”相符。此后至“一里,计功十万一百七十人,余土一丈”整数部分一致,而余数部分有差错。其中的问题很复杂,我们将另文分析。与《太白阴经》的对应文字一样,这些问题并不影响本文的结论。

② 原文作“中二”,今据《太白阴经》校正为“出土”。

③ 原文作“寸”,今据算理及《太白阴经》校正为“尺”。

④ 原文作“立”,今据上下文数据推算及《太白阴经》校正为“五”。

⑤ “城身”原文误作“身城”,今乙正。

⑥ 根据上下文,“一”校正为“三”。

⑦ 原文作“城堞”,二字误倒,今乙正。

⑧ 此处下阔加上阔的数据对应“次城”,而高五丈的数据则对应大城,显然与上面的规格不一致。但这与本文的主旨无关。

⑨ “一里三百六十步,计功六万七千五百人”中用步计量里,与前面计算一弓、一百弓的计功不协调。这个问题不影响本文的主旨,我们将另文分析。

⑩ 原文作“中二”,今参照其他四项材料校正为“出土”。

⑪ “立”字误,今据上下文数据推算及前3项文献的对应文字校正为“五”。

## 1.2 5 项史料中有关单位长度的城之体积和壕之容积的计算

以上 5 项史料都涉及用于防御的城之构筑和壕之开凿,而它们都是截面为梯形的棱柱。我们首先看其中对单位长度的城之体积和壕之容积的计算。

### 1.2.1 城墙

5 项文献有关城墙的文本非常相似,截面参数相同,都是上阔一丈二尺五寸、下阔二丈五尺、高五丈;计算方法都是先求上、下宽度之和,然后折半,再乘以高,得到截面积。之后都未提及具体如何运算而各自得到一段单位长度的城之体积,其中第 1、2、3、5 项都是“九十三丈七尺五寸”,第 4 项误作“九十二丈七尺五寸”,比实际数少一丈。但此错误的的数据与后面的“一步计役功二百七十八人,余土五尺”相合,可以推论这个错误既可能是《武备志》所据《太白阴经》版本之误,也可能是《武备志》编者抄错或沿袭以前的错误而后修改了后面的数据,还可能是《武备志》原来不误但在流传过程中抄错而又根据错误数据修改了后面的数据。无论如何,从体积本身的计算来说,都应该是“九十三丈七尺五寸”。另一个值得注意的地方是,针对这个数据有 4 条文献指的是一尺之城,只有 1 条文献指的是一丈之城<sup>①</sup>。两种情况有 9 倍的差距。由于 5 项文献中城的截面积相同,体积也相同,所以城的长度也应该相同。

### 1.2.2 壕沟

5 项文献有关壕沟的文本亦非常相似,截面参数相同,都是面阔二丈、底阔一丈、深一丈;其计算方法都是:先求面阔与底阔之和,然后折半,再以深乘之,得到截面积。之后都未提具体如何运算而各自得到一段单位长度的壕之容积都是“一十五丈”。但是,有 4 条文献指的是长度一尺的壕,仅有 1 条则指的是一丈之壕,两者亦相差 9 倍,与上述城的情况相同。由于 5 项文献中壕的截面积相同,容积也相同,所以壕的长度也应该相同。

### 1.2.3 5 项史料中单位长度的城之体积和壕之容积的单位辨析

上述城和壕的单位长度或为丈或为尺,相应的体积或容积本应相差一个数量级。但既然体积或容积相同,则其长度或为一尺或为一丈,肯定一正一误。此问题一也。

我们用现代的表达方式做一校算,作为比较的基础。

首先,对于各项资料中城的情形,如果是一尺之城,那么其真实的体积为:

$$(2.5 \text{ 丈} + 1.25 \text{ 丈}) \div 2 \times 5 \text{ 丈} \times 0.1 \text{ 丈} = 0.9375 \text{ 立方丈},$$

如果是一丈之城,那么其真实的体积为:

$$(2.5 \text{ 丈} + 1.25 \text{ 丈}) \div 2 \times 5 \text{ 丈} \times 1 \text{ 丈} = 9.375 \text{ 立方丈}。$$

类似地,对于各条中壕的情形,如果是一尺之壕,其容积为:

$$(2 \text{ 丈} + 1 \text{ 丈}) \div 2 \times 1 \text{ 丈} \times 0.1 \text{ 丈} = 0.15 \text{ 立方丈}$$

如果是一丈之壕,其容积为:

$$(2 \text{ 丈} + 1 \text{ 丈}) \div 2 \times 1 \text{ 丈} \times 1 \text{ 丈} = 1.5 \text{ 立方丈}$$

显然,原文所说城的体积“九十三丈七尺五寸”与现代的计量值 0.9375 立方丈、9.375 立方丈,原文所说壕的容积“一十五丈”与现代的计量值 0.15 立方丈、1.5 立方丈,

<sup>①</sup> 第 5 条所引《防守集成》中的“料工之法”计算时采用的数据与城的规格对应有误,下阔与上阔的数据取自“次城”之小者,而高的数据则取自大城之大者。此间必有错误。

不是一个系统,数值相差也很悬殊。古人的体(容)积计量方式在数量上与长度的计量方式相同,而现代的计量方式则采用不同的单位制度。

王荣彬、李继闵曾根据算书中的用法,结合汉代的斛制总结出一种古代的体(容)积计量方式“古人在测量体积时”,“先假定将立体化为底面边长为单位长度之正方形的直棱柱,用此柱体高的测度表示体积的大小”,当代表“体积的长短不止一种单位时,古人必以所提到的最大单位为其”底面正方形的边长([1],162、166页)。按他们的意见,当古人说一个东西的体积为 $a$ 丈 $b$ 尺 $c$ 寸时,指的是它的体积等于一个长方体的体积,其底为一个边长等于一丈的正方形,它的高度为 $a$ 丈 $b$ 尺 $c$ 寸。

按照王、李所总结的计量方式,上述城的“九十三丈七尺五寸”应是以1平方丈为底、以93.75丈为高的棱柱体之体积,等于93.75立方丈,是上述一丈之城的10倍、一尺之城的100倍。这意味着无论是作为一丈之城还是一尺之城的体积,“九十三丈七尺五寸”不仅不能按现代的方式理解,而且也不能按以前所认知的古代方式来理解。

同样地,上述壕的“一十五丈”,如果按王、李总结的计量方式,仍是一个以1平方丈为底、以15丈为高的棱柱的体积,等于15立方丈。这是一丈之壕容积的10倍,也是一尺之壕容积的100倍。这也同样意味着,无论是作为一丈之壕还是一尺之壕的容积,“一十五丈”都不能按现代和以前所认知的古代计量方式来理解。也就是说,兵学文献中这五项材料里的体积和容积的计量方式属于一种新的情形。那么这种新情形的实质是什么?此问题二也。

上述两个问题是互相关联的。体积同为“九十三丈七尺五寸”的城和容积同为“十五丈”的壕,其长度是一丈的情形比长度是一尺的情形,相应的体积和容积的实际数量要高一个数量级。也就是说,用同一个数量描述的体积和容积,城、壕真正的体积和容积,当长度为一丈时是长度为一尺时的10倍。

## 2 计量体(容)积的两种可能的新方式

根据上述兵学材料中的有关数据,再基于这些材料与王、李所揭示中国古代计量体(容)积的一种方式都以表示长度的方式来表示体(容)积这一事实,我们可以推知上述兵学文献中的土方计量,存在以下两种可能的方式:

(1)当说一个事物的体(容)积为 $a$ 丈 $b$ 尺 $c$ 寸时,其含义是该体(容)积等于一个长方体的体积,其底为一个长为 $a$ 丈、宽为一尺的长方形,其高度为 $a$ 丈 $b$ 尺 $c$ 寸。即:

(古体积或容积的) $a$ 丈 $b$ 尺 $c$ 寸 $=1$ 丈 $\times 1$ 尺 $\times a$ 丈 $b$ 尺 $c$ 寸

(2)当一个事物的体(容)积为 $a$ 丈 $b$ 尺 $c$ 寸时,其含义是该体(容)积等于一个长方体的体积,其底为一个长和宽都为一尺的正方形,其高度为 $a$ 丈 $b$ 尺 $c$ 寸。即:

(古体积或容积的) $a$ 丈 $b$ 尺 $c$ 寸 $=1$ 尺 $\times 1$ 尺 $\times a$ 丈 $b$ 尺 $c$ 寸

如果“九十三丈七尺五寸”的城、“十五丈”的壕的长度是“一丈”,则其体积、容积是按第一种方式进行计量的;而如果其长度为“一尺”,则其体积、容积是按第二种方式进行计量的。

“一尺之城”和“凿壕一尺”,是相当薄的一段,其体积“九十三丈七尺五寸”和容积

“一十五丈”给人的印象是比较大的数量,所以对于一个尺的城、壕来说,这两个体积、容积的数量似乎偏大,那么第1种方式成立的可能性好像要大一些。但这只是观感,不具有决定性。下面我们从多个方面做综合性的考察,证明其实第2种方式才是成立的。

(1) 先将各项史料中所述城墙和壕沟长度的计量单位列表1。

由表1可见,作“一尺之城”、“凿壕(濠)一尺”的样本远多于作“一丈之城”、“凿壕(濠)一丈”的样本,这增加了上述第2种方式成立的可能性。

《太白阴经》和《虎铃经》一样,其计量单位都是丈、尺互换,同时它们两者内部的计量单位也不统一,说明两条文献都各有一正一误。因此,这两条史料对作“一尺之城”、“凿壕(濠)一尺”都是一半支持一半反对。也就是说,这些异文本身对另外三项文献所指向的结论,不构成偏向性的支持与反对。

表1 筑城和凿壕长度的计量单位  
在五种兵学文献中的分布表

文献	城	壕(濠)
《太白阴经》	丈	尺
《通典》	尺	尺
《虎铃经》	尺	丈
《武备志》引《太白阴经》	尺	尺
《防守集成》	尺	尺

(2) 从5项文献中上下文的不同数据之间的关系来考察。

上述史料中描述“每一功(或工)”即每人(每日)筑土或挖土的数量:挖土都是“日出土三丈”,而筑土则有4项文献为日筑土“二丈”,惟独《通典》作日筑土“二尺”。显然,从文献样本数量看,《通典》的一处作“尺”居绝对劣势,应当为“丈”之误。那么,有没有可能作“丈”字的其他9处都错,惟独这一处作“尺”字者不误呢?

首先,在5项文献中,凿壕十五丈计功(工)五人,正好与日出土三丈相合,完全没有矛盾。所以在挖土时每一功是以“丈”计而不是以“尺”计的。其次,如果筑土时每一功只有“二尺”,那么,要15个功筑出的体积才能与1个功凿壕的容积“三丈”相等。挖土虽然比筑土要容易一些,但也不至于相差14倍。再次,在《通典》中“积数得九十三丈七尺五寸。每一功,日筑土二尺,计功约四十七人”中,如果真是每一功日筑土“二尺”,那么筑土“九十三丈七尺五寸”应“计功约四百七十人”(准确数为468.75人),是原文中“约四十七人”(准确数为46.875人)的10倍。所以从《通典》上下文的数字看,筑土的每一功也只能是“二丈”,其所谓“二尺”乃“二丈”之误。也就是说,5项文献中每一功日筑土都是二丈。

(3) 这5项文献中筑城“九十三丈七尺五寸”、凿壕“一十五丈”的长度到底是一尺还是一丈?

我们注意到,在讲完“九十三丈七尺五寸”的用功之后,第1、3、4项文献都接着计算筑城一步长的用功,其数目正是按“九十三丈七尺五寸”的5倍(1步为5尺)进行计算,后面计算100步的用功则按一步的100倍计算,计算一里(300步,或360步)则又按100步的用功数的3倍(或3.6倍)计算<sup>①</sup>。第2、5项文献由“九十三丈七尺五寸”的用功按6倍计算筑城一步或一弓(一步或一弓为6尺)的用功数,之后计算100步(弓)的用功按1步(弓)的100倍计算。所以,5项文献中上下文的数据都一致地表明,这“九十三丈七尺五

① 虽然由于余数存在差错,各数字略有出入,但不影响大数。

寸”指的是一尺之城的体积。

类似的 5 项文献在讲完凿壕的“一十五丈”的用功数为 5 人后,接着按其 5 倍(或 6 倍)计算凿壕一步五尺(或一步六尺)的用功数,再以此为基础计算凿壕 100 步(有的先计算 10 步,然后计算 100 步)、1 里的用功数。五项文献中上下文的数据也一致地表明“十五丈”指的是凿壕一尺的容积。因此 5 项文献中以作筑城“一尺”体积为“九十三丈七尺五寸”者为是,其作“一丈”者当校正为“一尺”;5 项文献中以凿壕“一尺”容积为“十五丈”者为是,其作“一丈”者亦当校正为“一尺”。

既然上述兵学文献中一尺之城的体积为“九十三丈七尺五寸”,则由上节的计算,可知这“九十三丈七尺五寸”等于现代计量方式下的 0.9375 立方丈,相当于 93 丈 7 尺 5 寸  $\times 1$  尺  $\times 1$  尺,亦即符合我们前面提出的第二种方式。同样的,凿壕一尺容积“十五丈”,等于现代计量方式下的 0.15 立方丈,相当于 15 丈  $\times 1$  尺  $\times 1$  尺,也符合我们前面提出的第 2 种方式。

上面的结论,我们还可以从算书中得到印证。

现传本《夏侯阳算经》是唐代编成的著作,与《通典》、《太白阴经》时代接近。其卷下第 43 题说:

今有开城濠,深二丈,阔三丈,长一里。每方三尺用一功。问功几何? 答曰:四万功。术曰:先置深、阔相乘,又以长里通尺乘之,为实。以功数方三尺再自乘为法除之,即得。<sup>[7]</sup>

这里城濠长一里的容积为:2 丈  $\times$  3 丈  $\times$  1 里 = 20 尺  $\times$  30 尺  $\times$  300 步  $\times$  6 尺/步 = 1080000 立方尺,这相当于 4 万功的工作量,故以 4 万功除 1080000 立方尺,得到 27 立方尺/功。而 27 立方尺 = 3 尺  $\times$  3 尺  $\times$  3 尺,即术文所谓“方三尺再自乘”。由此可见“每方三尺用一功”中的“方三尺”是指边长为 3 尺的正方体体积。因此这里开壕时一功(每人一日的工作量)为 27 立方尺。同书第 44 题说:

今有筑城,高三丈,上阔一丈五尺,下阔二丈五尺,长一百丈。每方二尺用一功。问功几何? 答曰:七万五千功。术曰:先置上、下阔并之,折半,以高乘之,又以长乘之,为实。以功数方二尺再自乘为法,除之,即得。( [7] A91 页)

容易验证,这里的“方二尺”是边长为 2 尺的立方体体积,因此每一功的工作量为筑城 8 立方尺。

可见《夏侯阳算经》中的一功,筑城时为兵学文献中的 0.4 倍,开壕时为兵学文献中的 0.9 倍,后者非常接近。如果兵学文献中体积和容积“一丈”按第一种方式即以底为 1 丈  $\times$  1 尺的长方形、高为一尺的立体来理解,则一功筑城的体积为 200 立方尺,一功凿壕的容积为 300 立方尺,分别是《夏侯阳算经》的 25 倍、11.1 倍多,其差别远比按第二种方式大。因此可以断定,兵学文献中体积、容积不可能按第一种方式进行计量。

现实中每功可以根据具体情形有一定差距,算书与实际也可以有一定差距,所以两者存在一定差异是正常的,但这些差异不大可能是很多倍,特别是不太可能有十倍甚至更多倍的差异。

另外,清初杜知耕《数学钥》卷 5 上之上云:

设一夫一日阙土可成五十尺,一日运土可成三十尺,一日筑土可成二十尺。令一

夫自阙自运自筑,求日成几何?<sup>[8]</sup>

其中日筑土为 20 尺,正好与上述兵学文献中每一功“二丈”按第二种方式理解的数值相同,而与按第一种方式理解的数值有 9 倍的差距。

至于这里阙土(挖土) 50 尺,是兵学文献中一功按第 2 种方式理解的  $\frac{5}{3}$  倍,而兵学文献中的一功按第一种方式理解的数值则是《数学钥》的 6 倍。所以这也支持第二种方式而非第一种方式。《数学钥》明确提到把挖出的土运走也单独记功,如果兵学文献中的“出土三丈”包括运土的工作在内,则两类文献的标准是相当接近的。再考虑到古人设算时以现实为背景但不一定完全照搬,加之各种土质不一,时代背景也不尽相同,每日工作量自然可以不同,所以算书数据与上述按第二种方式理解的数据之差距完全在可接受的范围内。

总之,古代兵学文献中存在一种尚不为今人所知的体积、容积计量方式,这种方式也是以长度的方式来表示:当说一个事物的体(容)积为  $a$  丈  $b$  尺  $c$  寸时,其含义是该体(容)积等于一个长方体的体积,其底为一个长和宽都是一尺的正方形,其高度为  $a$  丈  $b$  尺  $c$  寸。即:(古体积或容积的)  $a$  丈  $b$  尺  $c$  寸 = 1 尺  $\times$  1 尺  $\times$   $a$  丈  $b$  尺  $c$  寸。

### 3 新计量方式的发现有助于纠正错误的校释

对于兵学文献中的这些材料,有的学者往往对古人关于体积、容积的计量方式不太在意而一仍其旧。这时,如果不涉及具体的数据,尚无大碍。但有的学者则需要用到这些材料中的具体数据进行有关土方的计算,这时不了解古代的计量方式,就很容易做出错误的校改和解释。

比如王茂华、姚建根、吕文静在《中国古代城池工程计量与计价初探》一文<sup>[10]</sup>(以下简称“王文”)中讲《太白阴经》计算开凿面阔 2 丈、底阔 1 丈、深 1 丈的城壕之用功时,引了一小段原文作:

以面阔加底阔,积数三丈,半之,得数一丈五尺,以深一丈乘之,凿濠一尺,得数一十五(丈) [尺]。每一工日出土三(丈) [尺]。一尺,计工五人。一步,计工三十人;一里,计工一万八千人。一里为率,则百里可知。( [10] 211 页)

王文在“计工一万八千人”加注“此数似误”。这当然没有问题。其实“一万八千人”是“一万八百人”之误,详第一节脚注。王文引用《虎铃经》中与上述文字相对应的一小段文字作:

以面阔二丈加底阔一丈,积数约半得之,得数一丈五尺,以深一丈乘之,凿壕一(丈) [尺]得数一十五(丈) [尺],每工日出三(丈) [尺],计工五人。一步五尺,计工二十五人;十步,计工二百五十人;百步,计工二千五百人;三百六十步,计工九千人。率一里,则百里可知也。( [10] 211 页)

王文把两条文献中的“十五丈”和“出土三丈”里的“丈”字都改为了“尺”。

王文用现代挖地槽的标准作为参照对上述材料中的定额进行考察,但其论述有些地方的逻辑关系不清楚。他们得出了上述文献中开壕时“其劳动定额约为 0.62 立方丈/工日”,进而认为文献中“劳动定额均为‘每一工日出土三丈’,似有不妥之处”。并引欧阳修

《论修河利害》文“又欲增一夫所开三尺之方,倍为六尺。且阔、厚三尺,而长六尺,已是一倍之功,在于人力已为劳苦。若云六尺之方,以开方法算之,乃八倍之功,此岂人力之所胜”<sup>[9]</sup>①后称“欧阳修认为劳动定额应为3立方尺/工日比较合理。故‘丈’似为‘尺’之误,或古人借用‘丈’来表示‘立方尺’”。( [10] 211 页)

王文的这种处理问题很多。首先是校勘问题,在无版本依据的情况下将两处“丈”改为“尺”。其次是训诂问题,大概是觉得凭空把“丈”改为“尺”心有未安,乃又提出将“丈”作“立方尺”解。但作者似未意识到这更没有根据。三是计算有误。如果两条兵学文献中的每一功如王文所说的不是“日出土三丈”而是“日出土三尺”,那么按唐代一尺约30.3厘米<sup>[11]</sup>计算,这每一功“出土三尺”的体积是 $0.303^3 \times 3$ 立方米 $\approx 0.083$ 立方米,那么出土1立方米需要的工日为 $1 \div 0.083 \approx 11.98$ ,约为王文所用现代标准“0.45工日/立方米”的26.7倍。而如果按北宋一尺约31.6厘米( [11] 96 页)计算,则一功“出土三尺”约为0.095立方米,出土1立方米需要10.53工日,约为王文所用现代标准的23.4倍。显然,这样大的差距恰好证明改“出土三丈”为“出土三尺”是错误的。此外,王文引欧阳修的一段文字,以证明每工“日出土三尺”的合理性,其实适得其反。欧阳文中“三尺之方”是指边长为3尺的正方体,其体积为27立方尺,而不是如引者所期望的3立方尺。这一点,如果引用者结合下文读通引文,即甚明了。欧阳修的意思是:一个劳动力一日挖土的定额为一个边长3尺的正方体,如果把边长加倍,便是边长为6尺的正方体。一个宽和厚都是3尺、长为6尺的长方体,已经在原来一个工的定额上加了倍,这对劳动者已经是非常劳苦了。如果一个工的定额增加到一个边长为6尺的立方体的话(体积为 $6^3$ 立方尺=216立方尺),那么按开方法计算,可知达到了原来定额的8倍(216立方尺等于27立方尺的8倍),这哪里是人力所能胜任的呢?

实际上,欧阳修所说的一个功开壕“三尺之方”,与我们上面所引的《夏侯阳算经》的“每方三尺用一功”是完全一样的标准,折成现代的计量单位,按唐尺一功是 $0.303^3 \times 27$ 立方米 $\approx 0.75$ 立方米,按北宋尺一功是 $0.316^3 \times 27$ 立方米 $\approx 0.85$ 立方米。而如果按我们新发现的计量方式,每一功“日出土三丈”相当于以边长1尺的正方形为底、以3丈为高的棱柱,其体积为30立方尺,与“三尺之方”(27立方尺)非常接近。折成现代的数据,则约等于0.83立方米(按唐尺)或0.95立方米(按北宋尺)。那么挖1立方米需1.2工日(按唐尺计算)或1.05工日(按北宋尺计算),这与王文所用的现代标准挖1立方米需0.45工日相比,差距只有1倍多。这一差距和按王文校改后的文字计算造成的20多倍的差距相比,显然不可同日而语。考虑到环境不同、工具、深度等存在差异,所以这些标准完全在合理的范围之内。

又,王文讲到杜佑《通典》计算高5丈、下阔2丈5尺、上阔1丈2尺5寸的城墙的体积之用功时,引了一小段原文作:

上阔加下阔,得三丈七尺五寸,半之,得一丈八尺七寸五分,以高五丈乘之,一尺之城,积数得九十三丈七尺五寸。每一工,日筑土二尺,计工约四十七人。一步五尺之城,计役二百三十五人;一百步,计工二万三千五百人;三百步,计工七万五百人。

① “若云六尺之方”中“若”为原文所无,王文引用时误增之。

率一里,则十里可知。其出土负簣,并计之大功之内。( [10] 212 页)

王文在“积数得九十三丈七尺五寸”后加注称“似为 93.75 立方尺的借用表示”,同时还认为《通典》的“日筑土二尺”比《太白阴经》的“日筑土二丈”“更符合实际”。于是王文在用现代方式描述计算过程时有这样的式子:“每尺工程量 =  $(25 + 12.5) \times 50 \div 2 = 93.75$ , 每尺基本用工 = 每尺工程量  $\times$  施工劳动定额 =  $93.75 \div 2 \approx 47$ ”。

很明显,第一式把含有单位丈和尺的阔和高的数量统一化为以尺计量的数量,但没有乘上城的长度 1 尺。不过,因为只需再乘以 1,所以从数值上看不乘这 1 尺倒也没有影响。问题是王文的数值计算有误。很容易核实,第一式的结果不是王文的 93.75 而是 937.5(立方尺),那么按每工“日筑土二尺”计算,筑城一尺的用功不是王文第二式的约为 47 而是约为 470(准确数为 468.75)。可见,按王文的理解,一尺之城的积数和筑一尺之城的用工,与王文的期望相差了一个数量级。王文的另外一个矛盾是,王文认为“日筑土二尺”不误,并把其中的“尺”按正常的方式理解为立方尺,可王文又把“九十三丈七尺五寸”理解为 93.75 立方尺,其中的“尺”却被降一个数量级而理解为立方尺的十分之一,“丈”被降级理解为立方尺,这样既奇怪又矛盾,实在令人费解。

如上节所论,如果按我们发现的体积、容积计量方式来理解,各项文献完全可以读通,根本不会出现王文强为之说的解读问题,也不必对原文多加改动。

## 4 结 语

上面的讨论说明,兵学文献中存在一种以前不为学界所知的体积(容积)计量方式:说一个事物的体积或容积为  $a$  丈  $b$  尺  $c$  寸时,是指该积相当于一个以边长 1 尺的正方形为底、以  $a$  丈  $b$  尺  $c$  寸为高的正四棱柱的体积。这一发现不仅扩展了我们对中国古代数学、军事和土木工程的认识,而且对于正确校勘和释读有关古代文献,都有着重要的价值。

新发现的计量方式与王、李揭示的方式有以下共同之处:都把一个体积(容积)转化为一个正棱柱来理解,其底面都是一个正方形,并且都以高的长度来描述体积(容积)的数量。这种共性体现了中国古代体积、容积计量的一贯传统。两种方式的差别是:前者底面为 1 尺见方的正方形,后者的底面正方形之边长取描述体积(容积)的数量中之最大单位。后者早在先秦时代就已使用,而军事工程中的这种计量方式,在现存文献中以唐代为最早,虽然它可能出现得更早,但显然仍是晚出的。那么为什么军事工程的计算中要引进这样一种新的计量方式呢?

容易看出,使用早先的方式计量体积和容积时,随着量值的不同,可能采用不同的底面数据,可以是 1 丈见方的正方形、1 尺见方的正方形,还可以是 1 寸见方的正方形甚或其他单位边长的正方形,这种底面变化的方式很容易诱发数据的混淆,造成计算错误。这也是有些现代学者在释读古代文献时容易出错的地方。与此相比,前述兵学文献中的计量方式,统一以 1 尺见方的正方形为底面,是在已有计量方式基础上的改造。这一改造虽小,却使得计算时不容易出现混淆,在计功的计算中显然便利很多。由于中国古代军事活动中,经常要修建军事工程,这些工程大多由层次较低的部门负责计划和实施,那么,相应的经常性计算也大多由文化程度普遍不高的广大下层军官进行。为便于他们学习和掌

握 需要把原来易于混淆的计量方式加以改造,使之明了、简捷。本文新发现的这种体积、容积计量方式,大概就是在这种需求的推动下,改造已有的计量方式而引进的。显然,它能较好地适应军事活动对时效性的迫切需求,可能反映了军事应用的需要推动数学创造的一种情形。这实际与古代军事数学知识一般追求简单、快捷,易于学习和掌握的特点相一致<sup>①</sup>。

### 参 考 文 献

- 1 王荣彬,李继闯.中国古代面积、体积度量制度考[J].汉学研究,1995,13(2).
- 2 (唐)杜佑.通典[M].王文锦,王永兴,刘俊文,徐庭云(点校).北京:中华书局,1992.3893.
- 3 (唐)李筌.神机制敌太白阴经[A].中国兵书集成[Z].第2册.北京:解放军出版社,1988.
- 4 (宋)许洞.虎铃经[A].中国兵书集成[Z].第6册.北京:解放军出版社,1988.116~117.
- 5 (明)茅元仪.武备志[A].中国兵书集成[Z].第31册.北京:解放军出版社,1989.4595~4597.
- 6 (清)朱璣.防守集成[A].中国兵书集成[Z].第46册.北京:解放军出版社,1992.32.
- 7 (唐)韩延.夏侯阳算经[A].郭书春(点校).算经十书[Z].下册.台北:九章出版社,2001.490~491.
- 8 (清)杜知耕.数学钥[A].景印文渊阁四库全书[Z].第802册.台北:台湾商务印书馆,1986.192.
- 9 (宋)欧阳修.欧阳先生文粹[A].宋集珍本丛刊[Z].第5册.北京:线装书局,2004.124.
- 10 王茂华,姚建根,吕文静.中国古代城池工程计量与计价初探[J].中国科技史杂志,2012,33(2):204~221.
- 11 丘光明.中国历代度量衡考[M].北京:科学出版社,1992.88~89.

## New Discovery of the Method of Cubage Measurement in Ancient China

YANG Difei, ZOU Dahai

(Institute for the History of Natural Sciences, CAS, Beijing 100190, China)

**Abstract** In ancient China, people were used to measuring cubage by units of length, and to describing cubage by a length. Wang Rongbin and Li Jimin showed a method by which the ancient Chinese measured cubage. This paper shows a new method of measurement previously unknown to modern scholars: in order to describe cubage, ancient Chinese supposed that it was transformed into a right quadrangular prism, of which the base was a square with the side of 1 *chi*, while the length of the height was used to describe the value of the cubage. This measurement method could avoid confusion of quantities in calculations, was easy for most junior officers to learn and to master, and could fit the urgent need of timeliness in military activities. This new finding is significant for the understanding of ancient Chinese mathematics, measurement systems, and the interpretation of ancient historical literature.

**Key words** cubage measurement in ancient China, military engineering, interpretation of ancient literature

① 关于中国古代军事数学知识的特点,我们将另做详细论述。