数学史

关于天元术的发展的几个问题

郭书春

(中国科学院 自然科学史研究所，北京 100190)

摘　要　天元术是金元时代人们创造的设未知数列方程的方法，是宋元数学高潮的标志性成就之一. 元代祖颐在《四元玉鉴后序》中关于天元术发展史的文字谈的实际上是关于天元术的史前史. 元裕给刘如谐的《如积释锁》撰细草，才产生天元术. 李冶的《测圆海镜》、《益古演段》是现存最早的使用天元术的著作. 实际上，在这两部著作中，天元术是作为一种成熟的数学方法被使用的.《测圆海镜》既不是关于天元术的专门著作，《益古演段》也不是为普及天元术而写的. 学术界经常将天元式误认为是方程. 实际上，天元式是现今的多项式，经过"如积相消"得出的开方式即一元方程，在一次项旁是不标"元"字的.

关键词　天元术；列方程；李冶；测圆海镜；四元玉鉴

中图分类号　O112　　文献标识码　A　　文章编号　1008-1399(2013)04-0120-08

1　关于天元术的历史

关于天元术发展史的一段经典文字是元祖颐在《四元玉鉴后序》中写的. 他说[1]：

> 平阳蒋周撰《益古》，博陆李文一撰《照胆》，鹿泉石信道撰《钤经》，平水刘汝谐撰《如积释锁》，绛人元裕细草之，后人始知有天元也.

祖颐的描述应该是天元术的史前史. 所提到的各位作者的生平均不详，著作均不存. 平阳即今山西临汾，博陆即今河北蠡县，鹿泉即今河北获鹿，平水即今山西新绛，绛即今山西曲沃，这些地方都在太行山两侧. 元裕与李冶的好友元好问(1190－1257)是不是同一个人，自清中叶以来学术界即有不同看法. 元好问，字裕之，秀容(今山西省忻州)人. 罗士琳认为元裕即元好问，故将祖颐涉及到元裕的这句话改为"元裕之细草". 我们认为元裕不是元裕之. 他们不仅一个是晋南，一个是晋北，籍贯不同，而且不考虑罗士琳的误改，则名字各异，更重要的是，元裕之与李冶同为"龙山三老"，活动在天元术成熟的时代，而元裕则是天元术的初创者.《益古》即《益古集》，又称《益古算法》，已佚，因成为李冶使用天元术著《益古演段》的母本而部分保存在李冶该书中.《钤经》亦已佚，个别题目保存在李冶的《测圆海镜》中.《照胆》和《如积释锁》及其细草则没有留下任何只言片语.

奇怪地是，祖颐在这里没有提到通晓天元术的大数学家李冶.

李冶的《测圆海镜》、《益古演段》不仅是流传至今的以天元术为主要方法的最早的数学著作，而且他的《敬斋古今黈》卷一还记述了天元术早期发展的某些宝贵资料. 他说[2]：

> 予至东平，得一算经，大概多明如积之术. 以十九字志其上下层数. 曰：仙、明、霄、汉、垒、层、高、上、天、人、地、下、低、减、落、逝、泉、暗、鬼. 此盖以人为太极，而以天、地各自为元而陟降之. 其说虽若肤浅，而其理颇为易晓. 予遍观诸家如积图式，皆以天元在上，乘则升之，除则降之. 独太原彭泽彦材法，立天元在下. 凡今之印本《复轨》等书，俱下置天元者，悉踵习彦材法耳. 彦材在数学中亦入域之贤也. 而立法与古相反者，其意以为天本在上，动则不可复上. 而必置于下，动则徐上，亦犹易卦乾在下，坤在上，二气相交而为太也. 故以乘则降之，除则升之. 求地元则反是.

如果说祖颐的文字给出了天元术发展史前各种著作及其作者的嬗递脉络的话，那么李冶的这段文字则大体描述了天元术在其发展的初期的表示方法

收稿日期：2012-12-27；修改日期：2013-05-09

作者简介：郭书春(1941－)，男，山东胶州人，研究员，博士生导师，从事中国数学史研究. Email：scguo@ihns.ac.cn

的演变概况.

从李冶的话可以看出,天元术是在道家或道教思想的影响下产生与发展的. 天元术最早不是以一个字"元"表示未知数的,而是自上而下以仙、明、霄、汉等 9 个符号来表示未知数的正幂,以逝、泉、暗、鬼等 9 个符号来表示未知数的负幂. 盖建民《道教科学思想发凡》认为这明显受到道教的影响,带有浓厚的道教色彩. 有学者认为,这种表达方式暗示着道教数学在本质上的宇宙图式功能,是道教对宇宙结构的数学表达①. 由于整个中国传统数学没有产生高达十七八次的多项式,也没有这么高的次数的方程,这种看法有一定的道理.

后来人们简化天元术的表示,只用一个符号"天元"并借助于位值制表示未知数的正幂,用"地元"表示未知数的负幂. 并且皆采取天元在上,地元在下的方式.

彭泽彦材也是对天元术有突出贡献的当时知名的数学家,他受《周易》八卦"乾在下,坤在上,二气相交而为太"[3] 思想的影响,颠倒天元和地元的位置,将正幂置于下,将负幂置于上.《周易》是道家思想的主要源泉之一. 已经失传的《复轨》等著作采取彦材法.

再后来,人们取消了表示未知数的负幂的地元,只用"天元",借助于位值制既可表示未知数的正幂,又可表示未知数的负幂,还可以表示常数项. 开始仍采取正幂在上,负幂在下,沙克什的《河防通议》就是采用这种方式,应该源于 13 世纪初之前的金都水监本. 这就是李冶在《测圆海镜》中所使用者. 不久,人们又将其颠倒过来,采取正幂在下,负幂在上的方式,这就是李冶的《益古演段》、王恂和郭守敬的《授时历草》、朱世杰的《算学启蒙》和《四元玉鉴》等所采用者,应该是天元式的标准表示方式.

这里有几个问题值得注意. 首先,李冶本人和他谈到的洞渊,东平算经,彭泽彦材法,《复轨》等人或著作,在祖颐的文字中没有任何踪影. 祖颐提到的《益古》、《钤经》,李冶在《益古演段》、《测圆海镜》中分别有引用.

其次,祖颐说元裕给刘如谐的《如积释锁》撰细草,"后人始知有天元". 换言之,在元裕之前的《益古》、《照胆》、《钤经》、《如积释锁》等著作中没有天元术. 这涉及到如何解读《测圆海镜》中关于《钤经》等著作的文字问题.

另外,李冶在天元术发展、完善过程中起了什么作用. 李冶说,在人们还用"天元"、"地元"分别表示一个多项式的正幂和负幂时,彭泽彦材就将正幂在上,负幂在下颠倒成正幂在下,负幂在上. 可是,李冶在《测圆海镜》中只使用"天元",却仍然是正幂在上,负幂在下. 这说明天元术发展的进程在各位数学家那里不是同步的. 那么,是谁取消了"地元"?梅荣照说:"李冶对天元式表示法的主要贡献是:他在《测圆海镜细草》中取消了用地元表示负数次幂,只用一个天元,并采用正数次幂在上,常数与负数次幂在下的排列顺序."[4] 应该说,由于天元术发展早期的全部著作皆已亡佚,而《测圆海镜》不是关于天元术的专门著作,只是以天元术为主要方法的著作,李冶在《测圆海镜》中首先取消地元,还是一种猜测. 准确的说法是:《测圆海镜》是现存最早的只使用天元,不再使用地元表示未知数负幂的数学著作.《河防通议》中记载的天元术应该早于《测圆海镜》[5].

2 《测圆海镜》所引《钤经》与洞渊的内容

石信道《钤经》与洞渊算书早已亡佚.《测圆海镜》引用了它们的某些片段. 关于这些片段内容的界定涉及到如何定位石信道、洞渊与天元术的关系. 许多学者认为有关题目中的某些"草"分别是《钤经》与洞渊测圆门的,因此《钤经》与洞渊都通晓天元术. 我们认为这个问题值得进一步探讨. 关于这两部分内容的运算,李俨说之甚详[6]. 在这里,我们只是引出李冶《测圆海镜》的文字,并作简单的分析.

2.1 石信道的《钤经》

《测圆海镜》卷七"明叀前"第 2 问提到石信道《钤经》. 此题是[7]:

> 或问:丙出南门直行一百三十五步而立,甲出东门直行一十六步见之. 问答同前.
>
> 法曰:以丙行步一百三十五再自之,得二百四十六万〇三百七十五,于上. 又以甲

① 这是汲取姜生教授的意见.

行一十六乘丙行幂一万八千二百二十五，得二十九万一千六百；以乘上位，得七千一百七十四亿四千五百三十五万，为三乘方实. 以二行步相乘，又倍之，得四千三百二十；以乘丙行步，再自之，数得一百六亿二千八百八十二万，为益从. 第一廉空. 以甲行乘丙行幂，得二十九万一千六百；又倍之，得五十八万三千二百，于上；四之甲行幂一千〇二十四，以乘丙行步，得一十三万八千二百四十；减上位，余四十四万四千九百六十，为第二廉. 二行步相乘，得二千一百六十为虚常法. 得丙行步上勾弦差八十一.

草曰[①]：识别：二数相并，得一百五十一. 以减于皇极弦，余一百三十八，即虚勾、虚股并也. 若以二数相减，余一百一十九，为高弦内减平弦，又为皇极弦内少个小差弦，又为大差弦内减个皇极弦也.　立天元一为丙行大差数. 置丙行步一百三十五，自乘，得 18225，用天元除之$\begin{bmatrix} 0\text{太} \\ 18225 \end{bmatrix}$，为勾弦并也. 上减天元，得$\begin{bmatrix} -1 \\ 0\text{太} \\ 18225 \end{bmatrix}$，为二丙勾也. 复用丙南行乘之，得$\begin{bmatrix} -135 \\ 0\text{太} \\ 2460375 \end{bmatrix}$，为二积也. 又以天元除之，得$\begin{bmatrix} 0\text{元} \\ -135 \\ 0 \\ 2460375 \end{bmatrix}$，为丙勾外容圆半. 泛寄. 别置丙南行，用二甲勾乘之，得$\begin{bmatrix} 4320\text{太} \end{bmatrix}$，合用二丙勾除之，不受除，便以此为甲股. 内寄二丙勾为分母. 复用二甲勾三十二乘之，得$\begin{bmatrix} 138240\text{太} \end{bmatrix}$，为二个甲直积也. 又置丙南行，内减天元，得$\begin{bmatrix} -1\text{元} \\ 135 \end{bmatrix}$，为黄方. 以自乘，得$\begin{bmatrix} 1 \\ -270\text{元} \\ 18225 \end{bmatrix}$，为丙上勾弦差乘股弦差二段. 以天元除之，得$\begin{bmatrix} 1\text{元} \\ -270 \\ 18225 \end{bmatrix}$，为两个丙小差也. 乃用甲股乘之，得下式$\begin{bmatrix} 4320 \\ 1166400\text{太} \\ 78732000 \end{bmatrix}$，复用丙南行除之，得$\begin{bmatrix} 32\text{元} \\ -8640 \\ 583200 \end{bmatrix}$. 又折半，得下式$\begin{bmatrix} 16\text{元} \\ -4320 \\ 291600 \end{bmatrix}$. 为一个甲步股弦差也. 内亦带前二丙勾分母[②]. 复置二个甲直积，内已寄此. 甲股弦差分母便为甲步股外容圆半. 寄左. 乃再置先求到泛寄，用甲股弦差分母乘之，得$\begin{bmatrix} -2160\text{元} \\ 583200 \\ 0 \\ -10628820000 \\ 71744535000 \end{bmatrix}$，为同数. 与左相消，得下式$\begin{bmatrix} -2160 \\ 444960 \\ 0 \\ -10628820000 \\ 71744535000 \end{bmatrix}$. 开三乘方，得八十一步，即丙步上勾弦差也.

《钤经》载此法：以勾弦差率幂减丙行差幂，复以丙行乘之，为实. 以差率幂为法，如法得径. 此法只是以勾外求圆半，合以大差除倍积. 而今皆以大差幂为分母也. 依法求之，勾弦差八十一. 自之，得六千五百六十一. 以减于丙行幂一万八千二百二十五，余一万一千六百六十四. 复以丙行一百三十五乘之，得一百五十七万四千六百四十，为实. 以大差幂六千五百六十一为法，如法，得二百四十步，即城径也.

后面还有“又法”，略. 如图 1，这是已知

$$b_{11}=135,\quad a_{12}=16,$$

求圆径 d.

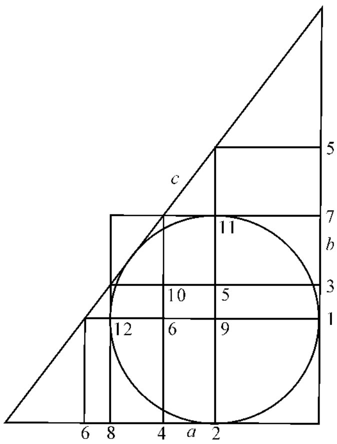

图 1　圆城图式

其法给出了以 $c_{11}-a_{11}$ 为未知数 x 的四次方程

$$-a_{12}b_{11}x^4+(2a_{12}b_{11}^2-4a_{12}^2b_{11})x^3-2a_{12}b_{11}^4x+a_{12}b_{11}^5=0,$$

此即

$$-2160x^4+444960x^3-10628820000x+$$

① 其中的算式，原文用算筹数字表示，为读者阅读方便计，这里改为阿拉伯数字，下同.

② 原刻本误作大字，今根据前后体例改作小字.

$$717445350000=0.$$

实际上消去 $a_{12}b_{11}$，便成为

$$-x^4+2(b_{11}-2a_{12})x^3-2b_{11}^3x+b_{11}^4=0.$$

其草给出了使用天元术推导方程的细草.

问题在于如何理解李冶说的“《钤经》载此法”. 李冶指出，《钤经》以公式

$$d=\frac{[b_{11}^2-(c_{11}-a_{11})^2]b_{11}}{(c_{11}-a_{11})^2}$$

求圆径. 那么，《测圆海镜》该题的“法”的其它部分与“草”中，有没有《钤经》的内容呢？

有的学者“怀疑这整个方法是取自《钤经》的”[4]，就是说，怀疑此问的“法”与“草”都是《钤经》的. 其根据一是此“草”开头列出了几条“识别杂记”的命题，接着却立天元一为丙行勾弦差，此及其下面的运算与这几条命题毫不相干. 二是在求得丙行勾弦差之后，可以直接代入勾外容圆半公式求圆径，此处没有这样做，却用《钤经》的方法. 还认为，“《钤经》在解决这个问题时，主要是用几何方法. 只有当式中的 $c_{11}-a_{11}$ 不能用几何方法计算的时候，才应用天元术”[4].

中国数学史界多同意这种看法，只不过有人将这里的“怀疑”换成肯定的口气[8].

我们认为这个问题还没有解决. 按照祖颐在为朱世杰的《四元玉鉴》所作的《后序》中的说法，元裕给《如积释锁》作细草，是天元术之始.《钤经》在元裕之前，不会有明确的天元术. 祖颐的记述应该得到朱世杰的首肯. 朱世杰对天元术造诣极深，又是宋元时期水平最高的数学家，他首肯的东西，应该是可信的. 换言之，《钤经》中会有方程的造术，但是不会有使用天元术的内容. 李冶也没有说该法的“草”是引自《钤经》的. 传本《测圆海镜》是清刻本，其中“《钤经》引此法”与“草”接排，是不是遵循原著，不得而知. 但是，人们将“此法”理解成上面的“法”与“草”. 实际上，在《测圆海镜》中，“法”或者是前人的，或者是李冶的，但“草”肯定是李冶的.“草”是李冶对洞渊九容“日夕玩绎”的结果，正因为有了“草”，才会使“向之病我者”，“爆然落去”[9]. 因此，此问中的“草”是李冶的，其前的“法”应该是《钤经》的，或者是《钤经》与洞渊测圆门共有的.

2.2　洞渊的测圆问题

《测圆海镜》卷十一第 18 题引用了洞渊①测圆门的片段. 许多学者认为，洞渊已能用天元术解决比较复杂的问题了. 为了探讨这个问题，我们先看看这个题目[7]：

> 或问：出北门一十五步，折而东行二百八步有树，出西门八步，折而南行四百九十五步见之. 问答同前.
>
> 法曰：先置南行步，内减一东二西并步，余二百七十一，为前泛率. 次并一南二北，内减东行步，余三百一十七，为中泛率. 次并东西步，以南行步乘之，于上位；又以西行乘南北，并得数，减上位，余一十万二千八百四十，为后泛率. 乃以后泛率自乘，得一百五亿七千六百六万五千六百，为三乘方实. 以前、中二泛相减，余四十六，以乘后泛数，为从. 前、中二泛相乘，得八万五千九百〇七，加入二之后泛数，共得二十九万一千五百八十七，于上位；又倍东西并②，以乘南北并，得二十二万三百二十，加上位，通得五十一万一千九百七为第一廉. 二之南北并，加入二之东西并③，得一千四百五十二，于上位；又以前、中二泛相减，余四十六，减上位，余一千四百六，为第二廉. 一步常法，得半径.
>
> 草曰：立天元一为半城径，加入东行西行并得 $\begin{bmatrix}1\text{元}\\216\end{bmatrix}$，为大勾也. 又置天元，加入南行北行并，得 $\begin{bmatrix}1\text{元}\\510\end{bmatrix}$，为大股也. 置西行八步，以大股乘之得下式 $\begin{bmatrix}8\text{元}\\4080\end{bmatrix}$. 合以大勾除之. 不除，寄为母，便以此为股尖也. 置南行四百九十五步，减天元，得 $\begin{bmatrix}-1\text{元}\\495\end{bmatrix}$. 用分母大勾乘之. 乘讫，得下式 $\begin{bmatrix}-1\\279\text{元}\\106920\end{bmatrix}$. 内减了股尖，余 $\begin{bmatrix}-1\\271\text{元}\\102840\end{bmatrix}$，为小股也. 内带

---

① 洞渊是道教中的一个通数学的流派.

② “又倍东西并”原刻本讹作“又并东西行”，依李鋭校正.

③ “二之南北并，加入二之东西并”原刻本讹作“二之前泛数，加入四之东西并”，依李鋭校正.

大勾分母.置小股,合以大勾乘了,复以大股除之,为小勾.今为小股内已有大勾为母,更不须乘,只以小股$\left[\begin{array}{r}-1\\271\text{元}\\102840\end{array}\right]$便为小勾也.内带大股为母.小勾小股相乘,得数为一个小勾股相乘直积,内带大勾股相乘直积为分母也.乃以半城径即天元也.除之,为一个弦较和也$\left[\begin{array}{r}1\\-542\\-132239\\55739280\text{太}\\10576065600\end{array}\right]$.此法本取勾外容圆,合以弦较和除二积,为勾外所容之圆.今用半天元圆径除一个积,则却得一个弦较和也.内依旧带大积分母也.寄左.然后再置小股$\left[\begin{array}{r}-1\\271\text{元}\\102840\end{array}\right]$,合用大积乘之,缘内已带大勾分母.今只用大股$\left[\begin{array}{r}1\text{元}\\510\end{array}\right]$乘之,得$\left[\begin{array}{r}-1\\-239\\241050\\52448400\text{太}\end{array}\right]$,为大积所乘小股,于上.再置小勾,合用大积乘之,缘内已带大股分母,合只用大勾$\left[\begin{array}{r}1\text{元}\\216\end{array}\right]$乘之,得$\left[\begin{array}{r}-1\\55\\161376\text{元}\\22213440\end{array}\right]$,为大积所乘之小勾也.以此小勾减上小股,得$\left[\begin{array}{r}-294\\79674\\30234960\text{太}\end{array}\right]$,即带分小较也.又二因小较,得此下式$\left[\begin{array}{r}-588\\159348\text{元}\\60569920\end{array}\right]$为带分二较也.又以大勾股直积$\left[\begin{array}{r}1\\726\\110160\text{太}\end{array}\right]$乘二之天元半圆经,得$\left[\begin{array}{r}2\\1452\\220320\\0\text{太}\end{array}\right]$,为一个带分弦较较也.弦较较乘弦较和为二直积.既以圆径除二直积,为弦较和,则是圆径为弦较较也.今又为半天元圆径除一积为弦较和,故倍天元半径作一个弦较较也.遂将此弦较较加入前二较,得$\left[\begin{array}{r}2\\864\\379668\text{元}\\60469920\end{array}\right]$,亦为一个弦较和也.与寄左相消,得下式$\left[\begin{array}{r}-1\\-1406\\-511907\\-4730640\text{太}\\10576064600\end{array}\right]$.开三乘方,得一百二十步,即半城径也,合问.

又法:此问系是《洞渊》测圆门第一十三,前答亦依洞渊细草,用勾外容圆术,以如于弦较和.然其数烦碎宛转费力.今别草一法,其廉、从与前不殊,而中间段络径捷明白.方之前术,极为省易,学者当自知也.

立天元为半径,副之.上并,加东西行,得$\left[\begin{array}{r}1\text{元}\\2160\end{array}\right]$,为通勾率.下并,加南北行,得$\left[\begin{array}{r}1\text{元}\\510\end{array}\right]$,为通股率,乃置西行八步,以通股乘之,得下$\left[\begin{array}{r}8\text{元}\\4080\end{array}\right]$.合通勾除,不除,寄为母,便以此为南小股也.又置南行四百九十五步,内减天元,得$\left[\begin{array}{r}-1\text{元}\\495\end{array}\right]$.用通勾乘之,得$\left[\begin{array}{r}-1\\279\text{元}\\106920\end{array}\right]$.内减了南小股,余下式$\left[\begin{array}{r}-1\\271\text{元}\\102840\end{array}\right]$,为股圆差也.内带通勾分母①.又置北行一十五步,以通勾乘之,得$\left[\begin{array}{r}15\text{元}\\3240\end{array}\right]$.合通股除,不除,寄为母,便以此为北小勾也.又置东行二百八步,内减天元,得$\left[\begin{array}{r}-1\text{元}\\208\end{array}\right]$.用通股乘之,得$\left[\begin{array}{r}-1\\-302\text{元}\\106080\end{array}\right]$.内减了北小勾,余$\left[\begin{array}{r}-1\\-317\text{元}\\102840\end{array}\right]$,为勾圆差也.内带通勾分母.乃以二差相乘,得下式$\left[\begin{array}{r}1\\46\\-291587\text{元}\\-4630640\\10576065600\end{array}\right]$,为半段圆径幂也.内带通积为母②,寄左.然后以通勾通股相乘,得$\left[\begin{array}{r}1\\726\text{元}\\110160\end{array}\right]$.以天元幂乘之,得$\left[\begin{array}{r}1\\726\\110160\text{元}\end{array}\right]$.又倍之,得下式$\left[\begin{array}{r}2\\1452\\220320\text{元}\end{array}\right]$,为同数.与左相消,所得廉、从一与前同.合问.

这是求圆城半径,设为x.如图2,已知出西门、出北门、折而东行和折而南行分别为

$$a'''=8,\quad b''=15,$$
$$a_2+a''=208,\quad b_1+b'''=495,$$

那么

$$a'=x+a_2+a''+a'''=$$
$$x+208+8=x+216,$$
$$b'=x+b_1+b''+b'''=$$

①"内带通勾分母",清刻本作大字,依下文改作小字.

②"内带通积为母",清刻本作大字,依上文改作小字.

$$x+495+15=x+510,$$
$$b'''=\frac{a'''b'}{a'}=\frac{8(x+510)}{x+216}.$$

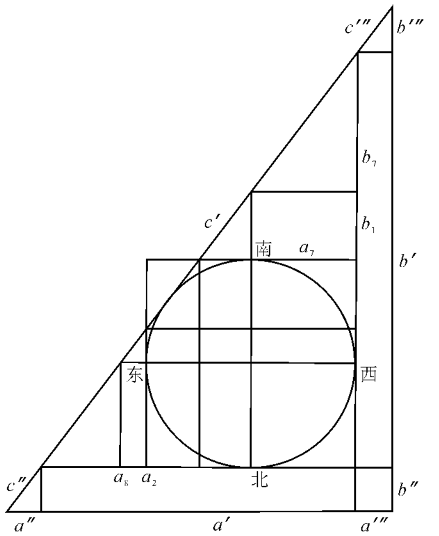

图 2　洞渊测圆图

接着,由勾外容圆公式,得到同等于 $c_7+b_7-a_7$ 的两个天元式

$$\frac{1}{(x+510)(x+216)}\Big(x^3-542x^2-132239x+55739280+\frac{10576065600}{x}\Big),$$
$$\frac{2x^3+864x^2+379668x+60469920}{(x+216)(x+510)},$$

将以上两式如积相消,得

$$x^3-542x^2-132239x+55739280+\frac{10576065600}{x}=2x^3+864x^2+379668x+60469920,$$

整理成

$$-x^4-1406x^3-511907x^2-4730640x+10576065600=0.$$

清中叶四库馆臣首先注意到这个问题中提到洞渊测圆门,并说李冶"于此问又明其为洞渊测圆门第十三题"[10].清末刘岳云《算学丛话》进而发现《测圆海镜》卷十一第 17,18 二问属于同类,他说:"依《海镜》理,出西门北门不得有行步,而卷十一后二问(按:即第 17,18 问),出北门行十五步,出西门行八步.详书意,盖于本勾股形外展大其勾股,勾为三百四十三,股为六百二十三,其八与十五即距城之数,为小勾股率.书中引为洞渊测圆门第十三题,然则洞渊之书,以圆内圆外互求,而九容乃其一端耳."[11]李俨则认为:"李冶《测圆海镜》卷十一后二问和全书体例不同,疑并出于洞渊."他将此二问的有关部分归于"洞渊的测圆术".但是认为第 18 问的"又法"主要指下面的草,"为李冶所作"[6].后来学术界基本上沿袭李俨的说法.但有的学者引用第 18 问时,却有意无意不引"又法"二字[8],给读者造成紧接"又法"的"此"自然是指"又法"前面的全部内容,即不仅"法",而且"草"也是洞渊所作的错觉.

此问是洞渊测圆门第 13 问是没有疑问的.问题在于,洞渊的"此问"含有哪些内容?我们认为,这里的"此问"含有题设、答案和"法"三种内容,不应该含有"草".我们知道,自《海岛算经》起,一直到北宋的《益古集》、《议古根源》等数学原著,都有"术"或"法",而没有"细草".为之作"细草"的是后人.没有证据显示洞渊测圆门与其他著作不同.因此,此问中的"法"自然是洞渊的,李冶指出其关键是"用勾外容圆术,以如于弦较和".而"草"则不然.李冶说的"亦依洞渊细草"不是说这是洞渊的"细草",而是说李冶依洞渊的"法"作的"细草".将"法"之后的"草"说成是洞渊的,根据似不足."又法"及其"草"自然是李冶所撰,李俨的看法是对的.其中应该表述的"实"、"第一廉"、"第二廉"、"常法"等则在下面的"草"展现,"又法"中没有赘述.

总之,从李冶的文字中看不出石信道与洞渊通晓天元术[12].

3　天元式的表示法

作为设未知数列方程的方法,天元术含有两项必须的内容,一是立天元一为某某,相当于现今之设未知数某某为 x.二是列出开方式,这就是根据问题的条件,先列出一个天元多项式,寄左;然后再列出一个与"寄左"者等价的天元多项式,作为"同数";最后,两者如积相消,得到一个开方式,即现今之一元方程.

天元式的表示分幂次高低的排列和"元"或"太"的使用等方面.

前已指出,在最初,比如东平算经,天元术中的天元多项式用十九个汉字表示常数项和未知数的各幂次,正次幂在上,负次幂在下.后来简化成以"太"

即“太极”表示常数项，天元在上，地元在下，分别通过与天元、地元的相对位置表示未知数的正次幂和负次幂，称为古法. 彦材法则颠倒了天元、地元的位置. 李冶或其前的某人取消了地元，只用一个汉字“太”标出常数项，或用“元”（即天元）标出未知数的一次项，其他各项的幂次完全由其与“太”或“元”的相对位置决定. 起初仍采取未知数的正幂在上，负幂在下的方式，这就是《河防通议》、《测圆海镜》中使用的方法. 后来李冶在《益古演段》中又借鉴彦材法，采取高次幂在下，低次幂在上的方式，遂成为 13 世纪下半叶、14 世纪初的通用方式. 其演变过程如图 3 所示.

东平算经	古法	彦材法	测圆海镜		益古演段	
x^9 仙						
x^8 明	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	x^2	x^{-2}	x^2	x^2	x^{-2}	x^{-2}
x 天	x 天	x^{-1} 地	x	x 元	x^{-1}	x^{-1}
A 人	A 太	A 太	A 太	A	A 太	A
x^{-1} 地	x^{-1} 地	x^1 天	x^{-1}	x^{-1}	x	x 元
⋮	x^{-2}	x^2	x^{-2}	x^{-2}	x^2	x^2
x^{-8} 暗	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x^{-9} 鬼						

图 3　天元术的表示法

比如《测圆海镜》卷三第 5 问[7]“草”中的天元式 $\begin{bmatrix} 144 \\ 5184\text{元} \\ 2488320 \end{bmatrix}$表示多项式 $144x^2+5184x+2488320$. 《益古演段》第 1 问[13] 中的天元式$\begin{bmatrix} 1600\text{太} \\ 80 \\ 025 \end{bmatrix}$表示多项式 $0.25x^2+80x+1600$.

有时在天元式中不标出“元”字或“太”字. 如《益古演段》卷中第 39 问[13] 有一天元式是$\begin{bmatrix} 3780 \\ 228 \\ 1 \end{bmatrix}$，表示多项式 $x^2+228x+3780$. 在《算学启蒙》中，几乎所有的天元式都不标出“太”或“元”字. 如卷下“开方释锁门”第 31 问[14]：

> 今有圆锥积三千七十二尺，只云：高为实，立方开之，得数不及下周六十一尺. 问：下周及高各几何？
>
> 术曰：立天元一为开立方数$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，再自乘为高也：$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. 再列开立方数，加不及，为下周也：$\begin{bmatrix} 61 \\ 1 \end{bmatrix}$. 自之，又高乘之，为三十六段积：$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3721 \\ 122 \\ 1 \end{bmatrix}$，寄左. 列积，三十六乘之. 与寄左相消，得开方式：$\begin{bmatrix} -110592 \\ 0 \\ 0 \\ 3721 \\ 122 \\ 1 \end{bmatrix}$，四乘方开之，得三尺，为开立方之数.

前四个天元式都没有标出“太”或“元”，它们依次是 $x, x^3, x+61, 3721x^3+122x^4+x^5$.

值得强调地是，天元式是指多项式或单项式，而不是指开方式[15]. 许多数学史著述将开方式称为天元式，甚至称为“天元开方式”[8]，说“天元开方式”就是一元高次方程，还说现今代数学的一元高次方程 $a_1x^n+a_2x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 古代写为

$$\begin{matrix} a_n \\ a_{n-1}\ \text{元} \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 \end{matrix} \quad \text{或} \quad \begin{matrix} a_n\ \text{太} \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 \end{matrix}.$$

这是不恰当的. “天元开方式”是作者因误解而杜撰的，李冶、朱世杰没有这种说法. 一般说来，在天元术中，经过如积相消，得出的开方式不再标以“太”或“元”. 如《测圆海镜》卷三第 5 问之“草”[7] 的开方式即表示成$\begin{bmatrix} 1 \\ -336 \\ 4184 \\ 2488320 \end{bmatrix}$，它表示三次方程

$$x^3-336x^2+4184x+2488320=0.$$

有的学者在引用这个开方式时在“4184”后加了个“元”字[4]，当然不妥.

《益古演段》第 6 问[13] 中，$\begin{bmatrix} 24057 \\ 0 \\ -825 \end{bmatrix}$表示二次方程

$$-8.25x^2+24057=0.$$

但是，《测圆海镜》中也有个别题目，在如积相消后得出的开方式中仍标以“元”，如卷三第 2 问[7]“法”之“草”中便有“相消得$\begin{bmatrix} -1 \\ -80\text{元} \\ 76800 \end{bmatrix}$，以平方开之”，其中的筹式亦表示方程

$$-x^2-80x+76800=0.$$

即使清刻本没有讹误，这也是极少数情形，而在《益

古演段》及其之后，再没有这种表示，因此这不具有一般性. 还有一种可能性，就是清刻本误加“元”字，在对天元式和开方式的表示方式认识不明确的情况下，这种讹误极易发生. 正如 20 世纪许多作者在引用李冶、朱世杰的开方式时常在未知数的一次项旁加原书中没有的“元”字一样. 无论如何，作为成熟的天元术而言，“如积相消”得出的开方式是不出现“元”字的，与天元式是有根本区别的. 有人说“李冶的天元式，既可表示方程，又可表示多项式. 从形式看，两者并无区别”[8]，当然是不妥当的.

参考文献

[1] 祖颐. 四元玉鉴后序[C]// 郭书春. 中国科学技术典籍通汇·数学卷·四元玉鉴：第一册[M]. 郑州：河南教育出版社，1993.

[2] 李冶. 敬斋古今黈[M]. 北京：中华书局，1990.

[3] 阮元. 十三经注疏：周易[M]. 北京：中华书局影印，1980：46.

[4] 梅荣照. 李冶及其数学著作[C]// 钱宝琮. 宋元数学史论文集. 北京：科学出版社，1966：104-148.

[5] 郭书春.《河防通议·算法门》初探[J]. 自然科学史研究，1997，16(3)：223-232.

[6] 李俨. 测圆海镜研究历程考[C]// 郭书春，刘钝. 李俨钱宝琮科学史全集：第八卷. 沈阳：辽宁教育出版社，1998：37-222.

[7] 李冶. 测圆海镜[C]// 郭书春. 中国科学技术典籍通汇·数学卷：第一册. 郑州：河南教育出版社，1993.

[8] 孔国平. 测圆海镜导读[M]. 武汉：湖北教育出版社，1996：8-10.

[9] 李冶. 测圆海镜自序[C]// 郭书春. 中国科学技术典籍通汇·数学卷：第一册. 郑州：河南教育出版社，1993.

[10] 四库馆臣. 测圆海镜提要[C]// 四库全书文津阁本. 北京：中华书局，2006.

[11] 刘岳云. 测圆海镜通释[M]. 成都：尊经书局刻本，1896.

[12] 郭书春. 中国科学技术史·数学卷[M]. 北京：科学出版社，2010.

[13] 李冶. 益古演段[C]// 郭书春. 中国科学技术典籍通汇·数学卷：第一册[M]. 郑州：河南教育出版社，1993.

[14] 朱世杰. 算学启蒙[C]// 郭书春. 中国科学技术典籍通汇·数学卷：第一册[M]. 郑州：河南教育出版社，1993.

[15] 郭书春. 尊重原始文献避免以讹传讹[J]. 自然科学史研究，26(3)，2007：438-448.

Some Problems on the Development of Tianyuan Shu

GUO Shuchun

(Institute for the History of Natural Sciences, CAS, Beijing 100190, PRC)

Abstract: Tianyuan shu is a method to set unknowns and equation in the periods of Jin and Yuan. The method is a landmark achievement of mathematical climax in Song and Yuan dynasties. In fact, what Zu Yi said in Yuan dynasty for the development of tianyuan shu in *Preface of Jade Mirror of Four Unknowns* is a prehistory of tianyuan shu. Tianyuan shu emerged when Yuan Yu wrote detailed draft for Liu Ruxie's *Ru Ji Shi Suo*. Li Ye's *Ce Yuan Hai Jing* and *Yi Gu Yan Duan* are the earliest works for using tianyuan shu. In the two works, tianyuan shu was actually used as a mature mathematical method. *Ce Yuan Hai Jing* is not a specialized work of tianyuan shu. That Li Ye wrote *Yi Gu Yan Duan* was also not for popularizing tianyuan shu. The formula of tianyuan was often mistaken as equation. As a matter of fact, the formula of tianyuan is nowadays polynomial. It becomes formula of extraction, namely equation with one unknown quantity, through “ru ji xiang xiao”. The character “yuan” was not marked beside the item of first degree.

Keywords: Tianyuan Method (Tianyuan Shu), Set up higher equation, Li Ye, *Sea Mirror of Circle Measureement* (*Ce Yuan Hai Jing*), *Jade Mirror of Four Unknowns* (*Si Yuan Yu Jina*)